UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON

Facultad de Economía

LA TEORIA Y EL CALCULO DE FUNCIONES HOMOHYPALLAGICAS DE PRODUCCION

ANALISIS APLICADO A LA INDUSTRIA CERVECERA MEXICANA

TESIS

QUE EN OPCION AL TITULO DE
LICENCIADO EN ECONOMIA
PRESENTA

Francisco Jorge Patiño Leal

MONTERREY, N. L. SEPTIEMBRE DE 1969

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON

Facultad de Economía

LA TEORIA Y EL CALCULO DE FUNCIONES HOMOHYPALLAGICAS DE PRODUCCION

ANALISIS APLICADO A LA INDUSTRIA CERVECERA MEXICANA

TESIS

QUE EN OPCION AL TITULO DE
LICENCIADO EN ECONOMIA
PRESENTA

Francisco Jorge Patiño Leal

MONTERREY, N. L. SEPTIEMBRE DE 1969

A mis Padres y Hermanos a

quienes todo debo .

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a aquellas personas que desinteresadamente tuvieron la amabilidad de asesorar este estudio: Lic. Leoncio Durandeau, profesor de Teoría Económica, Lic. e Ing. Eladio Sáenz Q., profesor de Matemáticas para Economistas, y en primer término, al Maestro Jesús Marcos, profesor de Comercio Internacional, a quien muchas horas de su tiempo robé.

Al Lic. Ernesto Bolaños, Director de la Facultad de Economía, y al Lic. Isidro Paz Torres por las facilidades y el aliento que me brindaron, y al Lic. Alejandro Martínez y al Lic. César Rangel, por sus valiosas observaciones y correcciones.

A los señores Alejandro Garza Lagüera, Reynaldo Reyna y Alejandro Salinas, por haber hecho posible con su ayuda disponer de las facilidades e información necesarias para la elaboración y procesamiento de datos.

Y finalmente, a aquellas personas amigas sin cuyo apoyo y ánimos, este estudio hubiera sido imposible.

INDICE GENERAL

Página

Página

INTRODUCCION

Los aspectos teóricos de la función de producción han sido intensivamente tratados en la literatura económica moderna. A su vez, serios intentos de investigación empírica son llevados a cabo, la razón de esto residiendo en el carácter trascendental del conocimiento de las leyes que rigen los fenómenos de índole económica. Frecuentemente se observan apreciaciones y juicios lógicamente ordenados que carecen sin embargo, de una base sólida; juicios basados en supuestos que subyacen al análisis y que condicionan y limitan el alcance del mismo, a la vez que en muchos casos, significan a final de cuentas, un desperdicio de ese precioso recurso que es el tiempo (entre otros).

En el presente estudio se pretende presentar la teoría y la estimación de la función de producción, haciendo énfasis en los tres tipos de función más conocidos: de Coeficientes Fijos de Leontief, Cobb-Douglas, y la más reciente, la función Homohypallágica (o CES*). La primera tiene como características que asume a priori homogeneidad de grado uno (rendimientos constantes) y elasticidad de sustitución de los factores cero. La función Cobb-Douglas caracteriza elasticidad de sustitución constante e igual a uno a lo largo de la curva isocuanta. Por su parte la función Homohypallágica,** como su nombre lo indica supone elasticidad de sustitución a lo largo de la isocuanta, pero no determinada en un valor dado, de ahí su generalidad y gran utilidad, ya que engloba a las dos funciones anteriores que representan pues, casos particulares de ésta.

---

* Del inglés Constant Elasticity of Substitution (Elasticidad Constante de Substitución).

** Del griego ὅμος (igual) e ὑπάλλακτος (sustitución).

Para cumplir tal objetivo, se ha dividido la presente tesis en tres capítulos. En el primer capítulo se derivan la función de producción CES siguiendo el camino recomendado por el profesor Murray Brown ⟨4⟩ (más conveniente para nuestros propósitos que el camino que sugieren los descubridores de este tipo de función ⟨2⟩), y como las funciones de Coeficientes-Fijos y Cobb-Douglas son casos especiales de ella, entonces hemos dispuesto de su derivación en el transcurso del proceso de derivación de la misma función CES.

En un segundo capítulo describimos la teoría general de las funciones de producción; vemos cuáles son las propiedades Neoclásicas que una función de producción debe poseer para poder serlo, y derivamos además las condiciones de optimización en la producción en términos generales (y atendiendo al supuesto de mercados de producto y factores competitivos, por simplicidad principalmente). Por otra parte, en secciones subsiguientes de este mismo capítulo, aplicamos los conceptos mencionados y derivados acerca de Propiedades Neoclásicas y condiciones de optimización a cada una de las tres funciones, de las cuales además derivamos las funciones de costos que implican.

Finalmente, el último capítulo está dedicado a la estimación de la función de producción de la industria cervecera mexicana, y a la consideración de las implicaciones prácticas de las estimaciones mismas.

No se pretende que este estudio resulte exhaustivo; tampoco se pretende que los resultados puedan ser concluyentes, pues falta aún mucho por investigar en la materia. Hay factores que limitan el alcance del estu dio. La inexistencia de alguna información precisa que se hagan estimaciones de la misma, (y éstas no dejan de serlo), la insuficiencia académica y todos aquellos errores a los cuales nos hallamos sujetos por ser hombres, - nos proveen las principales instancias de limitación.

La hipótesis originalmente planteada ("la elasticidad de sustitución de capital por trabajo en la industria cervecera mexicana difiere significativamente de uno y de cero...") ha sido rechazada. Nuestra tesis demuestra que en el caso de esta industria la mencionada elasticidad de sustitución- no difiere significativamente de uno. La anterior consideración nos sugiere que la función de producción Cobb-Douglas personifica mejor las condiciones que rigen la producción de la Industria cervecera mexicana, y esta es precisamente una de las conclusiones a que llegamos más abajo.

Sin embargo, no es nuestro propósito generalizar estos resultados a las demás industrias, sino más bien se trata de un ejercicio metodológico sobre "la Teoría y el Cálculo" de las funciones de producción, que creo es el único mérito que puede reclamar este trabajo.

CAPITULO I

DERIVACION DE LAS FUNCIONES DE PRODUCCION COEFICIENTES FIJOS DE LEONTIEF, COBB-DOUGLAS, Y C.E.S.

Como ya se advierte en el título de este capítulo, se procederá a derivar las funciones de producción Coeficientes Fijos de - Leontief, Cobb-Douglas, y C.E.S. Para tal fin, definiremos la función de producción, en términos generales, como

$$Q = f(K, L) \qquad (1)$$

en donde Q representa la cantidad producida, K el insumo de Capital, y L el insumo de trabajo.

La diferencia existente entre las tres funciones aludidas es el valor que toma la elasticidad de sustitución de capital por trabajo (σ) en cada una de ellas (cero, uno, y cualquier constante positiva, respectivamente). La elasticidad de sustitución de K por L se define, manteniendo constante en Qo el producto, como la razón del - cambio porcentual en la proporción de insumos al cambio porcentual en la tasa marginal de sustitución (TMS), la cual a su vez se define (manteniendo en Qo el producto, por supuesto) como la negativa de la pendiente de la isocuanta. (Lo anterior identifica a como una propiedad de la superficie de producción).

En las definiciones anteriores hemos mantenido Q en Qo, de donde se sigue debamos manifestar K como función de L, o viceversa.

Así pues, sintetizando:

$$K = K(L), \tag{2}$$

$$TMS = -(dK/dL) = (\partial Q/\partial L)/(\partial Q/\partial K) = -K', \text{ y} \tag{3}$$

$$\sigma = \frac{d(K/L)/(K/L)}{dTMS/TMS} = \frac{d(K/L)}{dK'} \cdot K' \cdot (L/K) \tag{4}$$

De la ecuación (4) de la elasticidad de sustitución, buscaremos una expresión general de la misma, con base a (2) la ecuación general de la isocuanta. Hay que derivar entonces:

$$\frac{d(K/L)}{dK'} = \frac{L(dK/dK') - K(dL/dK')}{L^2} = \frac{1}{K''}\left(\frac{LK' - K}{L^2}\right) \tag{5}$$

ya que

$$dL/dK' = 1/K'' \tag{6}$$

$$dK/dK' = (dK/dL)(dL/dK') = K'/K'' . \tag{7}$$

Sustituyendo (5) en (4) nos queda (8)

$$\sigma = K' (L/K) \left[(LK' - K)/L^2\right] (1/K'')$$

$$\sigma KLK'' = K' (LK' - K), \tag{8}$$

una ecuación diferencial de segundo orden, la solución de la cual constituye la ecuación general de la isocuanta.

A.- DERIVACION DE LA FUNCION COEFICIENTES FIJOS DE LEONTIEF.-

Como ya se observó, es particular de este tipo de función que la elasticidad de sustitución es igual a cero, y si insertamos este valor en (8) tendremos

$$K'(LK' - K) = 0 \quad , \qquad (9)$$

que nos ofrece dos posibles soluciones al resolverla:

$$\begin{cases} \text{(a)} \qquad LK' - K = 0 & \qquad (10.a) \\ \text{(b)} \qquad K' = 0 \quad . & \qquad (10.b) \end{cases}$$

Resolviendo (a) en

$$K' = K/L$$

$$dK/K = dL/L \ , \qquad (11)$$

vemos que debe ser rechazada, ya que esta expresión nos indica que si aumentamos un factor debemos aumentar el otro también, para que permanezca constante el producto. Podría decirse que nos ubicaría esta solución en el tramo no económico de la curva isocuanta, y por - tanto no nos interesa.

La solución la hallamos resolviendo (b)

$$K' = 0$$

$$dK/dL = 0 \ , \qquad (12)$$

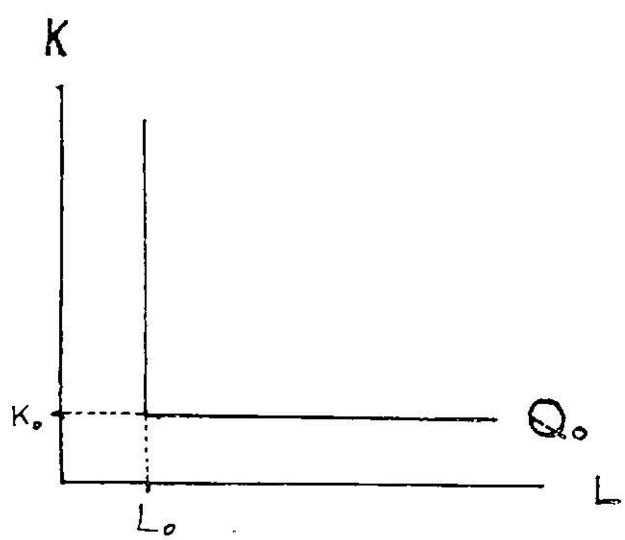
que se integra en

$$K = c \text{ (una constante)}, \qquad (13)$$

que nos dice que el insumo de capital está únicamente determinado - por el nivel de Q. Del resultado señalado, se infiere que la ecuación de la isocuanta de una función de producción de tipo Leontief es pues

$$\begin{cases} K = K_o \; ; \; L \geq L_o \\ L = L_o \; ; \; K \geq K_o \end{cases} \qquad (14)$$

la representación gráfica de la ecuación de la isocuanta, cuando es igual a cero, nos es dada por la Gráfica I



Gráfica 1.- Isocuanta de una funcion de producción de tipo Leontief.

En esta gráfica se muestra como, si se mantiene constante uno de los dos factores, el producto permanecerá constante aunque la cantidad insumida del otro aumente. En otras palabras, si $L = L_o$, - aunque elevemos K hasta infinito, Q no variará quedándose en Q_o. Igualmente, $K = K_o$, Q permanecerá en Q_o para todo $L \geq L_o$.

B.- DERIVACION DE LA FUNCION COBB-DOUGLAS.-

Procederemos ahora a derivar la función Cobb-Douglas. Es - sabido que σ toma el valor de uno en este tipo de función, o sea, introduciremos un caso en que $\sigma > 0$, y para tal fin habremos de fijar $L = e^{u}$ en

$$\sigma KLK'' = K' \, (LK' - K). \qquad \text{(1a. Sust.)}$$

Tendremos pues:

$$du/dL = e^{-u}$$

$$d^2\, u/dL^2 = - \, e^{-2u}$$

$$K' = dK/dL = (dK/du)\,(du/dL) = y' \,.\, e^{-u}$$

$$K'' = d^2K/dL^2 = - \, y' \, e^{-2u} + e^{-u} \, dy'/dL$$

$$dy'/dL = (dy'/du)\,(du/dL) = y'' \, e^{-u}$$

$$K'' = d^2K/dL^2 = y'' \, e^{-2u} - y' \, e^{-2u} \, ,$$

quedando finalmente después de sustituir y simplificar

$$\sigma Ky'' + Ky' \, (1 - \sigma) - y'^2 = 0 \, , \qquad (15)$$

una ecuación diferencial de segundo orden, en la cual las derivadas son con respecto a <u>u</u>, que no está contenida explícitamente, sin embargo, circunstancia que permite reducir el orden de la ecuación si se fija $P = y'$. Tenemos entonces (2a. Sust.)

$$\sigma K \, (dP/dK) + K(1 - \sigma) - P = 0, \qquad (16)$$

que se rearregla en

$$(dP/dK) - (P/\sigma K) = (\sigma-1)/\sigma \quad , \tag{17}$$

una ecuación diferencial lineal. Esta puede ser resuelta usando $K^{-1/\sigma}$ como factor de integración y sustituyendo $N = -1/\sigma K$ y $R = (\sigma - 1)/\sigma$

$$P = e^{-\int NdK} \int e^{\int NdK} R.dK + c\, e^{-\int NdK} \tag{18}$$

$$P = e^{-\int -\frac{1}{\sigma K} dK} \int e^{\int -\frac{1}{\sigma K} dK} . \frac{\sigma - 1}{\sigma} . dK + c e^{-\int -\frac{1}{\sigma K} dK}$$

$$P = K^{\frac{1}{\sigma}} \int K^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right) dK + cK^{1/\sigma}$$

$$P = K + c\, K^{1/\sigma} \quad , \tag{19}$$

la cual, en la notación original es, devolviendo $P = dK/d$

$$dK/du = K + c\, K^{1/\sigma} \tag{20}$$

Ya habíamos mencionado que σ toma el valor de uno cuando la función es del tipo Cobb-Douglas, y así, asignándole este valor a σ en (20), nos queda

$$dK/du = K + cK = K\,(1 + c) \tag{21}$$

que se integra en

$$dK/K = du \quad (1 + c)$$

$$\ln K = u\,(1 + c) + \ln k \quad (k \text{ es una constante})$$

$$\ln (K/k) = u\,(1 + c)$$

$$K/k = e^{u\,(1 + c)}$$

$$K = k\, L^{(1 + c)} \quad , \tag{22}$$

que viene siendo la ecuación de la isocuanta de una función de producción del tipo Cobb-Douglas.

Resta en este punto construir la función de producción con grado de homogeneidad v (Irrestricta), y derivar como caso especial una función que exhiba rendimientos constantes a la escala, esto es, una función lineal (Restricta).

Para tal fin, escribimos

$$Q = Q\,(L^{1+c}/K) = Q\,(w)\,, \tag{23}$$

y por medio del teorema de Euler, que nos dice:

$$vQ = K\,(\partial Q/\partial K) + L\,(\partial Q/\partial L), \tag{24}$$

esto es, que estipula que el producto (Q) multiplicado por el grado de homogeneidad (v) es igual a la suma del pago (o la aportación) total a todos los factores, suponiendo desde luego, que se les paga de acuerdo con su productividad marginal ($\partial Q/\partial K$, $\partial Q/\partial L$).

Desarrollando pues,

$$vQ = K\left[(-L^{1+c}/K^2)\,(dQ/dw)\right] + L\left[(1/K^2)\,(1+c)\,KL^c\,(dQ/dw)\right],$$

$$vQ = (c\,L^{1+c}/K)\,(dQ/dw)$$

$$vQ = cw\,(dQ/dw)$$

$$dQ/Q = (v/c)\,(dw/w)$$

$\ln Q = (v/c) \ln w + \ln \gamma$ (γ es una constante) ,

$\ln (Q/\gamma) = (v/c) \ln w$,

$Q/\gamma = w^{v/c}$,

nos queda finalmente, devolviendo la sustitución $w = L^{1+c}/K$

$$Q = \gamma \, L^{v/c + v} \, K^{-v/c} , \qquad (25)$$

que es la función Cobb-Douglas de producción, con $\sigma = 1$ y grado $\underline{v}$ de homogeneidad, i.e., en forma "irrestricta".

Para el caso bastante conocido de función Cobb-Douglas con rendimientos constantes, no hay más que fijar $a = (-1/c)$ e insertar el valor de $\underline{v}$ igual uno en (25), que así, se transforma en

$$Q = \gamma \, L^{1-a} \, K^{a} , \qquad (25)$$

y que es también llamada función de producción Cobb-Douglas "Restricta".

C.- DERIVACION DE LA FUNCION DE PRODUCCION CES.-

Nos queda por derivar el caso más general, y por ende más interesante, en que σ es constante a lo largo de las isocuantas y toma un valor cualquiera no-negativo. Es este el caso de la función de producción CES, que ocupa un lugar principal en este trabajo.

Teníamos

$$dK/du = K + cK^{1/\sigma} \qquad (19)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden. Una vez supuesto σ igual a una constante, entonces se procede a transformar la ecuación, que puede ser rearreglada

$$L\,(dK/dL) = K + c\,K^{1/\sigma}, \qquad (19)$$

en una ecuación diferencial lineal en u.

ya que

$$u = 1/K^{(1/\sigma)-1}$$

$$(1/u)^{\sigma/(1-\sigma)} = K$$

$$u' = (du/dL) = e^{-u}$$

$$dK/dL = -(\sigma/1-\sigma)\,(1/u)^{(\sigma/1-\sigma)-1}\,(1/u)^{2}\,u'$$

$$dK/dL = -(\sigma/1-\sigma)\,(1/u)^{1/(1-\sigma)}u', \qquad (26)$$

entonces, insertándolo en (19):

$$-L\,(\sigma/1-\sigma)\,(1/u)^{1/(1-\sigma)}u' - (1/u)^{\sigma/(1-\sigma)} + c(1/u)^{1/(1-\sigma)}, \qquad (27)$$

y multiplicando a ambos lados de la ecuación por $(1/u)^{-\sigma/1-\sigma}$:

$$-L(u'/u)\,(\sigma/1-\sigma) = 1 + c\,(1/u)$$

$$-\frac{\sigma}{1-\sigma}\,u' = \frac{u}{L} + \frac{c}{L},$$

nos queda finalmente

$$u' + (u/L)\left[(1-\sigma)/\sigma\right] + (c/L)\left[(1-\sigma)/\sigma\right] = 0, \qquad (28)$$

que puede ser resuelta con la ayuda de la fórmula general para la solución de ecuaciones lineales diferenciales, quedándonos por resolver

$$u = e^{-\int NdL} \int e^{\int NdL} .R.\, dL + k\, e^{-\int NdL} , \tag{29}$$

donde

$$N = (1 - \sigma)/\sigma\, L$$

$$R = \left[-(1 - \sigma)/\sigma\right] \; (c/L)$$

$$\int NdL = \left[(1- \sigma)/\sigma\right] \; \log L = \log L^{(1/\sigma)-1}$$

Entonces,

$$u = e^{-\log L^{(1/\sigma)-1}} \int -e^{\log L^{(1/\sigma)-1}} \left[(1- \sigma)/\sigma\right] (c/L)\, dL + ke^{-\log L^{(1/\sigma)-1}}$$

$$u = c + k\, L^{1-(1/\sigma)} \quad , \tag{30}$$

que en la notación original queda

$$1/K^{(1/\sigma)^{-1}} = c + k\, L^{1 - (1/\sigma)} ,$$

o lo que es lo mismo

$$K^{1-(1/\sigma)} - k\, L^{1-(1/\sigma)} = c \quad , \tag{31}$$

que representa la ecuación de la isocuanta cuando se suponen condiciones de CES en la producción.

Ahora bien, para construir una función de producción homogénea de grado γ, nos auxiliamos de nuevo en el teorema de Euler. Supongamos por simplicidad que $\alpha = (1/\sigma) - 1$, y fijemos

$$Q = Q(K^{1 - (1/\sigma)} - kL^{1-(1/\sigma)}) = Q\ (w) \ , \tag{32}$$

entonces, aplicando el teorema de Euler

$$vQ = -L\left[1-(1/\sigma)\right] kL^{-1/\sigma} (dQ/dw) + K\left[1-(1/\sigma)\right] K^{-1/\sigma} (dQ/dw)$$

$$vQ = \left[1-(1/\sigma)\right] w \ (dQ/dw) = -\alpha \ w \ (dQ/dw)$$

$$dQ/Q = -(v/\alpha) \ (dw/w), \tag{33}$$

que se integra en

$$\log Q = -(v/\alpha) \log w + \log k' ,$$

produciendo finalmente

$$Q = k' \left(K^{-\alpha} - k\,L^{-\alpha}\right)^{-v/\alpha} , \tag{34}$$

la función de producción CES homogénea de grado $\underline{v}$. Hay un arreglo restante para expresar la función en (34) de una manera más convenien te, por razones que más abajo se apuntarán.

Ya que $\underline{k}$ y $\underline{k}'$ son constantes, podemos aprovecharnos de esto fijando

$$k' = \beta ,$$

$$kk' = -\alpha ,$$

$$\alpha + \beta = \gamma^{-\alpha/v}$$

y $$\beta \gamma^{\alpha/v} = c$$

y que al insertarlos en (34), se transforma esta en

$$Q = \gamma \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha}\right]^{-v/\alpha} \tag{35}$$

En (35), hallamos una variable dependiente (Q), dos variables indiependientes (K y L), y cuatro parámetros (γ, c, α, v) cuya significación estudiaremos más abajo.

Para el caso mencionado de rendimientos constantes (función de producción CES "restricta") basta insertar el valor de v igual a uno en (35), de donde nos resulta

$$Q = \gamma \left[c\, K^{-\alpha} + (1 - c)\, L^{-\alpha} \right]^{-1/\alpha} \qquad (35)$$

que representa la función recién aludida, en donde $\alpha = (1/\sigma) - 1$ como más tarde veremos.

CAPITULO II

CARACTERISTICAS DE LAS FUNCIONES DE PRODUCCION. COEFICIENTES FIJOS DE LEONTIEF, COBB-DOUGLAS, Y C.E.S.

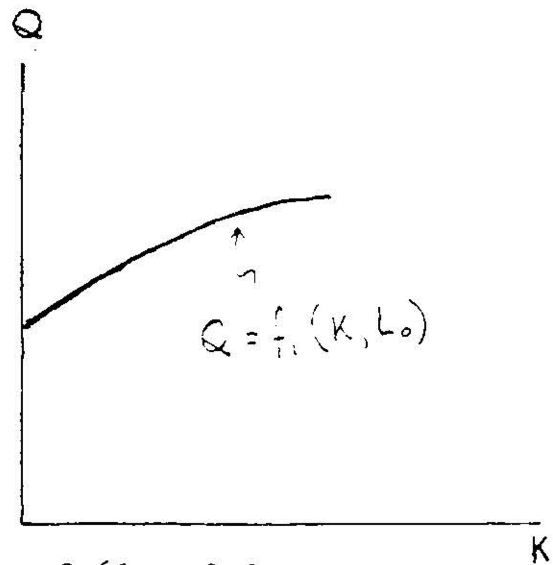
A. Generalidades

Como paso natural después de haber derivado los tres tipos de función de producción, hay que mostrar las características inherentes a cada una de ellas. Se hace necesario establecer sin embargo, un marco sobre el cual se supone deban ser analizadas. Por otra parte, cabe también apuntar las condiciones de optimización en la producción bajo estas condiciones generales para después extenderlas a los casos particulares que cada función representa, y mostrar finalmente como de hecho son las funciones de producción coeficientes Fijos y Cobb-Douglas casos particulares de la función CES.

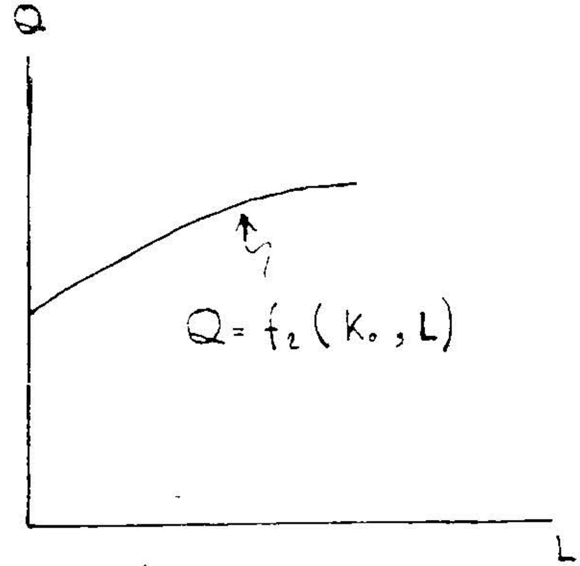
A.1 Se establecen a continuación los llamados "criterios neoclásicos" que toda función de producción "normal" debe llenar ⟨20⟩ :

a) El primer criterio a satisfacer es el de que las productividades marginales de los factores de producción sean positivas a cualquier nivel positivo de producto (esto es, que $\partial Q/\partial K, \partial Q/\partial L > 0$), estableciéndose sin embargo, un caso límite en el cual se igualen a cero las productividades marginales.

El cumplimiento de este criterio puede ser establecido gráficamente (Gráficas 2.1a y 2.1b) si se muestra al producto como una función monotónica creciente del insumo de factores:



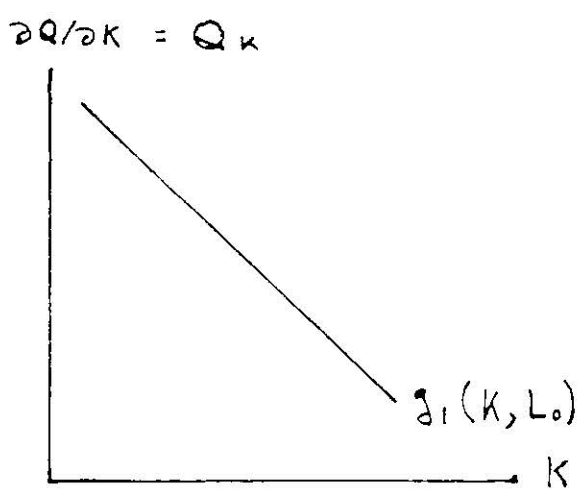
Gráfica 2.1. a



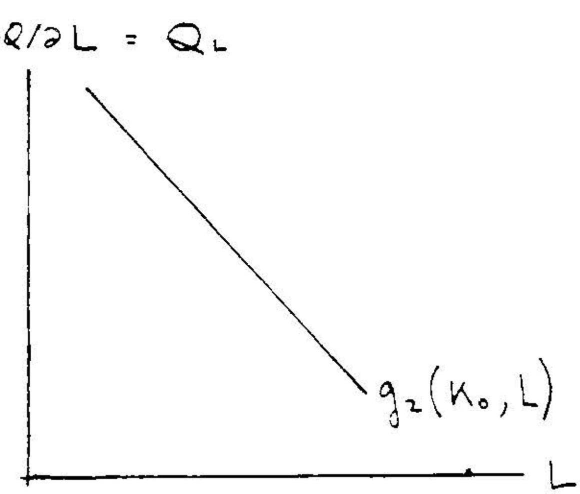
Gráfica 2.1. b

b) El segundo criterio va un poco más allá que el primero; nos establece que la productividad marginal física de los factores, además de ser positiva a todo nivel positivo de Q, sea una función monotónica decreciente de la utilización de los mismos cuando hay un factor fijo.

Se representa diagramáticamente este criterio en las gráficas 2.2a y 2.2b a continuación:



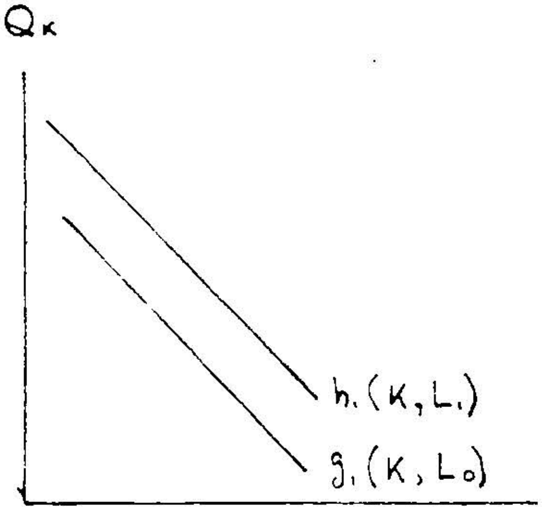
Gráficas 2.2.a



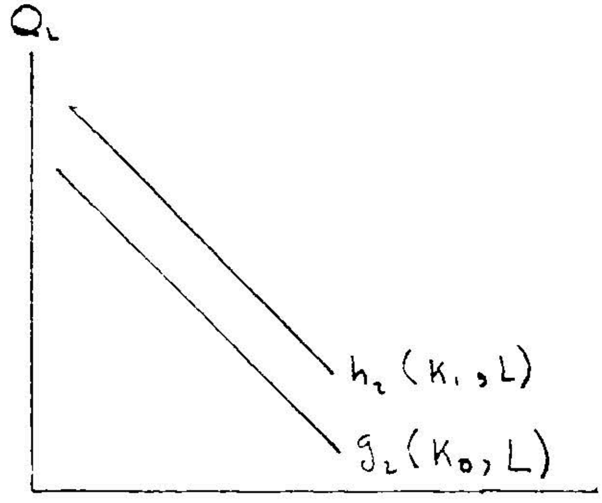
Gráfica 2.2.b

El cumplimiento de este criterio por cualquier función de producción nos indica que en ella la productividad marginal de los factores es decreciente, o lo que es lo mismo, que en esa función de producción se personifica o toma lugar la Ley de los Rendimientos Decrecientes (que puede ser descrita analíticamente como $\partial^2Q/\partial K^2$, $\partial^2Q/\partial L^2 < 0$).

c) El tercer "criterio neoclásico" que deben llenar las funciones de producción es aquel que nos dice que la productividad marginal física de un factor debe de aumentar cuando se aumenta el insumo del otro factor, de tal manera que puede ser establecido alternativamente de manera analítica como $\partial^2Q/\partial K \partial L > 0$. En otras palabras, el criterio (c) requiere el desplazamiento hacia arriba de cada una de las curvas de producto marginal de un factor cuando aumenta la cantidad utilizada del otro, que equivale a decir que en las gráficas 2.3a y 2.3b se pase de las funciones q_1 y g_2 a h_1 y h_2, respectivamente, y entre las cuales la única diferencia existente es una cantidad mayor de factor fijo en las últimas.



Gráfica 2.3.a



Gráfica 2.3.b

Otra condición que acompaña este tercer requisito, es que la función de producción no suponga, a priori, un grado de homogeneidad determinado.

d) $d^2 K/dL^2 > 0$, esto es, que las isocuantas de la función de - producción sean cóncavas hacia arriba. Si comprendemos que este criterio puede ser establecido como dTMS/dL, entonces es susceptible de ser expresado alternativamente como

$$d(-Q_L/Q_K) \;/\; dL = (-1/Q_k^2) \left[Q_k(dQ_L/dL) - Q_L\,(dQ_k/dL)\right] > 0$$

o lo que es lo mismo

$$-(1/Q_k)^3 \left[Q_{LL}\, Q_k^2 - 2Q_{kL}\,(Q_L\, Q_k) - Q_{kk}\, Q_L^2\right] > 0$$

La 2a. expresión dentro de paréntesis es una forma cuadrática en la cual cada término posee un grado uniforme, por lo cual esta condición, llamada también de 2o. orden, puede ser escrita de la siguiente forma:

$$Q_{LL} < 0 \quad , \qquad \begin{vmatrix} Q_{LL} & -Q_{kL} \\ -Q_{Lk} & Q_{kk} \end{vmatrix} > 0 \, ,$$

ya que $Q_k \neq 0$.

A. 2 Una vez establecidos los criterios neoclásicos para funciones de producción, pasaremos a derivar las condiciones de optimización, en general, en la producción, para poder después establecer cuáles son éstas para cada una de las funciones particulares bajo estudio.

a) Maximización de Producto (Q) sujeto a restricción presupuestaria (C_o).- Se trata de ver bajo qué condiciones se maximiza el producto, que es una función de K y L, sujeto a un cierto nivel de presupuesto, cuya ecuación se establece como

$$C = P_k . K + P_L . L \quad ,$$

en donde Pk y P_L* son el precio del servicio del capital y trabajo, respectivamente.

Ya que se trata de un problema de optimización bajo restricciones, se hace necesario hacer uso del método de Multiplicadores Indeterminados de Lagrange para encontrar las condiciones de primer orden y Determinantes Hessianos bordeados para las de segundo orden ⟨7⟩ .

Entonces, hay que

Maximizar $\quad Q = f(K, L)$

Sujeto a $\quad C_o = K.P_k + L . P_L$,

lo cual se logra maximizando

$$Z = f(K,L) + \lambda (C_o - K. P_k - L . P_L) ,$$

donde λ es el multiplicador. Así pues, igualando las primeras derivas a cero

$$(Z_k =) \quad Q_k - \lambda P_k = 0$$

$$(Z_L =) \quad Q_L - \lambda P_L = 0$$

$$(Z_\lambda =) \quad C_o - K.P_k - L. P_L = 0$$

* Lo anterior supone que el productor contrata los factores en mercados - perfectos.

Obtenemos

$$\lambda = \frac{Q_K}{P_K} = \frac{Q_L}{P_L}$$

como condición necesaria para maximizar Q sujeto a C_o. Las condiciones suficientes, o de segundo orden están dadas por

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -P_K & -P_L \\ -P_K & Q_{kk} & Q_{kL} \\ -P_L & Q_{Lk} & Q_{LL} \end{vmatrix} > 0$$

que viene de requerir $d^2 Z < 0$, y que simplifica en

$$2\, Q_{KL}\, P_K\, P_L > Q_{KK}\, P_L^2 + Q_{LL}\, P_k^2$$

b) Minimización de costo (c) dado un nivel de producto (Q_o).- Este caso es semejante al anterior en cuanto al tratamiento que se seguirá. Aquí, la función objetivo a minimizar es

$$Z = P_k \cdot K + P_L \cdot L - \mu \left[Q_o - f(K,L)\right]$$

Igualando las primeras derivadas a cero

$$(Z_k =) \quad P_k - \mu \cdot Q_k = 0$$
$$(Z_L =) \quad P_L - \mu \cdot Q_L = 0$$
$$(Z_\mu =) \quad Q_o - f(K, L) = 0$$

nos resulta

$$\mu = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_L}{Q_L}$$

(en donde μ puede ser interpretado como el costo marginal) como la condición necesaria para minimizar C sujeto a Q_0. Las condiciones de segundo orden se representan por el Hessiano bordeado siguiente:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -Q_k & -Q_L \\ -Q_k & Q_{kk} & Q_{kL} \\ -Q_L & Q_{Lk} & Q_{LL} \end{vmatrix} > 0$$

o en otra forma

$$\mu \ (Q_{kk} \ Q_L^2 - 2 \ Q_{kL} \ Q_k \ Q_L - Q_{LL} \ Q_k^2) < 0$$

ya que $\mu \neq 0$ lo anterior se reduce a que la expresión dentro del paréntesis sea negativa.

c) Maximización de Utilidades.- Supuestamente, este es el fin que persigue toda empresa. Para la consecución de tal fin, la empresa (aquí supondremos por simplicidad que trabaja bajo condiciones de competencia perfecta) busca hacer máxima la diferencia entre Ingresos y Costos. Los Ingresos (I) están dados por

$$I = P_q \cdot Q$$

donde P_q es el precio de Q, el producto, y los costos (C) por

$$C = P_k \cdot K + P_L \cdot L$$

Si recordamos que $Q = f(K,L)$, entonces sabremos que el problema se reduce a maximizar

$$U = I - C = P_q \cdot f(K,L) - P_k \cdot K - P_L \cdot L$$

Así pues, igualando las primeras derivadas a cero

$$(U_k =)\quad P_q \cdot Q_k - P_k = 0$$
$$(U_L =)\quad P_q \cdot Q_L - P_L = 0$$

y resolviendo P_k y P_L, tenemos

$$P_k = P_q \cdot Q_k$$
$$P_L = P_q \cdot Q_L$$

o lo que es lo mismo, que el empresario deberá contratar unidades de cada factor hasta el punto en que el costo marginal de contratar ese factor t (P_t) sea igual al Ingreso Marginal que le produce esa unidad de factor t ($P_q \cdot Q_t$).

Si bien la condición de primer orden requería que $dU = 0$, la condición de segundo orden requiere $d^2 U < 0$, y eso sólo se da si

$$U_{kk} < 0;\ U_{LL} < 0;\ U_{LL}\, U_{kk} > U_{kL}^2$$

B. <u>La Función Coeficientes Fijos de Leontief</u>.

Los valores extremos que puede tomar la elasticidad de sustitución son cero e infinito, que corresponden a los casos de isocuanta quebrada rectangular e isocuanta recta. El primero de los casos ($\sigma = 0$) es el que corresponde a la función de Coeficientes Fijos de Leontief. Este tipo de función se encuentra en el límite de los criterios Neoclásicos, <u>it est</u>, ni cumple ni deja de cumplir con ellos, todo esto debido desde luego a la falta de sustituibilidad de los factores.

B.1 La función de producción posee ciertas características tecnicas muy particulares. Por ejemplo, ya se derivó la función en el capítulo anterior y se vio que el insumo de K y el de L están únicamente determinados por el nivel de producto. Este hecho permite hablar de ciertos coeficientes fijos adscritos a los insumos en la función de producción, que entonces se escriba explícitamente ⟨ 2 ⟩

$$Q = \min \left(\frac{K}{a} , \frac{L}{b} \right) \tag{36}$$

en ella, podemos identificar a a y a b como los coeficientes fijos de K y de L, respectivamente.

Si despejamos K y L en (36), nos quedan (suponiendo a K y L perfectamente divisibles)

$$K = a\,Q \tag{37}$$

$$L = b\,Q$$

que nos dicen que, tanto el insumo de capital como el insumo de trabajo que se requieren para producir Q unidades de producto, están dados por la multiplicación de Q por a y b, que entonces pueden ser interpretados como el insumo mínimo requerido de K y L, respectivamente, por unidad de producción de Q.

B. 2 La función coeficientes fijos no posee la propiedad Neoclásica de no especificar el grado de homogeneidad a priori, ya que supone rendimientos constantes de escala.

Veámoslo:

$$f(K, L) = \text{mín}\ (a^{-1}K,\ b^{-1}L)$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \text{mín}\left[a^{-1}(\lambda K),\ b^{-1}(\lambda L)\right]$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{1}\ \text{mín}\ (a^{-1}K,\ b^{-1}L)$$

y así confirmamos que la función de tipo Leontief supone homogeneidad de grado uno a priori.

B.3 La elasticidad de sustitución es igual a cero (y de hecho se partió de ese supuesto para derivarla) en una función de Coeficientes Fijos de Leontief, y es esta característica la que la distingue.

Basados en que la función es homogénea de grado uno, podemos expresar la elasticidad de sustitución de la siguiente manera⟨ 1 ⟩ :

$$\sigma = \frac{(\partial Q/\partial K)\ \ (\partial Q/\partial L)}{Q^2\ (\partial^2 Q/\partial K\,\partial L)} \qquad (39)$$

La expresión anterior es igual a cero cuando la función es de este tipo -(Leontief), ya que las primeras derivadas (parciales) son igual a cero, corroborándose la aserción original ($\sigma = 0$).

B.4 Como siempre, detrás de la función de costos de la empresa se encuentra la función de producción. Una vez que se conoce ésta, se puede entonces llegar a la función de costos, en la cual se tiene el costo total como una función del producto.

Derivemos pues la función de costos que corresponde a la función Coeficientes Fijos. Tenemos sólo dos ecuaciones, la función de producción y la ecuación de costo,

$$Q = m(a^{-1}K \ , \ b^{-1}L)$$

$$C = K \cdot P_k + L \cdot P_L$$

Despejemos K y L en la función de producción ,

$$K = a\,Q \qquad (37)$$

$$L = b\,Q \qquad (38)$$

y sustituyamos (37) y (38) en la ecuación de costo ,

$$C = a\,Q\,P_k + bQ\,P_L$$

que se simplifica para producir

$$C = (a\,P_k + bP_L)\ Q \qquad (39)$$

la función de costos.

C. La Función de Producción Cobb-Douglas.

A diferencia de la función de tipo Leontief, la Cobb-Douglas no representa uno de los casos especiales (por ser casos límites) de funciones de producción, pues σ toma un valor entre cero e infinito.

En el capítulo I, cuando se derivó la función de producción Cobb-Douglas, se estipuló que la relación entre insumos y producto está dada por

$$Q = \gamma K^{-v/c} \quad L^{v/c + v}$$

En esta función se encuentran presentes los cuatro elemtnos de una tecnología abstracta, personificados en parte por los diferentes parámetros que contiene.

Se dice que una tecnología abastracta contiene: un elemento de distribución (o intensidad de capital), que está dado por c en este caso de función tipo Cobb-Douglas (25); un elemento que pueda explicar el cambio tecnológico neutral (eficiencia), contenido en en (25); un elemento que nos hable del grado de economías de la escala en la producción (grado de homogeneidad, denotado en (25) por v; y además, un elemento que nos indique el grado de facilidad con el que se sustituyen mutuamente el capital y el trabajo, y que en el caso de (25) está contenido implícitamente en ella (la medida usualmente empleada para la medición aludida es σ, la elasticidad de sustitución). La forma en que se afectan los diferentes parámetros varía con el grado de intensidad y dirección del cambio tecnológico.

¿Por qué se dice que v es el parámetro de homogeneidad? La respuesta la encontramos buscando el grado de homogeneidad de (25):

$$f(K,L) = \gamma K^{-v/c} \quad L^{(v/c + v)}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \gamma\,(\lambda K)^{-v/c} \quad (\lambda L)^{(v/c + v)}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \gamma\,\lambda^{-v/c} \; K^{-v/c} \quad \lambda^{(v/c + v)} \quad L^{(v/c + v)}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \gamma \quad \lambda^{v} \,(\quad K^{-v/c} \quad L^{v/c + v}) = \lambda^{v} f(K,L)$$

El resultado es que la función es homogénea de grado $\underline{v}$, y así corroboramos que el elemento grado de homogeneidad nos es dado por el parámetro $\underline{v}$.

Por otra parte, resulta hasta cierto punto obvio que el parámetro γ en (25) es el que da cuenta de la eficiencia de la tecnología y del - cambio en la misma (siempre y cuando éste sea neutral). Podemos expresar el cambio tecnológico neutral en aumentos en γ . La consecuencia es que con la misma cantidad anterior de insumos el producto es mayor:

Supongamos que el cambio tecnológico se manifiesta en aumentar γ de γ_0 a γ_1 ($\gamma_1 > \gamma_0$), y que tanto K como L y que $\underline{v}$ y $\underline{c}$ no cambian. Si llamamos Q_1 al producto después del cambio tecnológico, y - Q_0 al producto antes del cambio, tendremos

$$Q_1 = \gamma_1 \quad K_0^{-v/c} \quad L_0^{v/c + v}$$

$$Q_0 = \gamma_0 \quad K_0^{-v/c} \quad L_0^{v/c + v}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{\gamma_1 \quad K_0^{-v/c} \quad L_0^{v/c + v}}{\gamma_0 \quad K_0^{-v/c} \quad L_0^{v/c + v}}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \tag{40}$$

Pero ya que $\gamma_1 > \gamma_0$, entonces

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} > 1$$

de donde se infiere que

$$Q_1 > Q_o$$

esto es, que el producto después del cambio tecnológico (Q_1) es mayor que el producto antes del cambio (Q_o), y que este cambio se manifiesta en una variación positiva de γ .

Decimos por otra parte, que c es el parámetro de distribución, y tenemos que probarlo. Para ello, tenemos que suponer que a los factores se les paga de acuerdo con su productividad marginal (condición de optimización), i.e. $P_k = VPMK$ y $P_L = VPML$, y por simplicidad, supongamos además que el numerario es en unidades de producto, de tal manera que $Q_k = P_k$ y $Q_L = P_L$. Efectuando, los resultados que tenemos son

$$Q_k = -(v/c) \quad Q/K \tag{41}$$

$$Q_L = (v/c + v) \quad Q/L \tag{42}$$

$$P_k = Q_k$$

$$P_L = Q_L$$

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{Q_k}{Q_L}$$

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{-(v/c) \quad Q/K}{v(1/c + 1) \quad Q/L}$$

$$\frac{K \; . \; P_k}{L \; . \; P_L} = \frac{-1}{1 + c} \tag{43}$$

y esto nos indica que efectivamente c es el parámetro de distribución.

Normalmente, $\underline{c}$ tiene un valor negativo que, en un sentido estricto, sólo puede variar entre $-\infty$ y menos uno. El primero de los casos $(-\infty)$ corresponde a aquella situación en la cual todo va a parar al factor trabajo, debido a que la productividad del capital es cero, y el segundo, cuando $\underline{c}$ es igual a menos uno, entonces sólo el capital recibe pago, ya que la productividad marginal del trabajo es nula. De la observación de estos dos casos extremos podemos concluir que, a mayor valor de $\underline{c}$ mayor participación del capital con respecto al trabajo y, viceversa, a menor valor de $\underline{c}$, mayor participación del trabajo relativa a la del capital.

C.1 La Elasticidad de Sustitución en la función de Producción Cobb-Douglas.- Ya se había venido mencionando que la elasticidad de sustitución bajo este tipo de función de producción es igual a uno, e inclusive se partió de ello en la derivación de la función, sin embargo, no está por demás revisar la verdad de tal afirmación.

Se había definido σ en el primer capítulo como

$$\sigma = \frac{d\ (K/L)/\ (K/L)}{d(dK/dL)\ /\ (dK/\ dL)} \qquad (4)$$

y más tarde se llegó a una formulación más explícita de la misma

$$\sigma = \frac{\frac{dK}{dL}\left(L\ \frac{dK}{dL} - K\right)}{K\,L\ \frac{d^2\,K}{d\,L^2}} \qquad (8)$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación anterior los valores correspondientes:

$$\sigma = \frac{-\frac{\varphi}{\beta}\frac{K}{L}\left[L\left(-\frac{\varphi}{\beta}\frac{K}{L}\right) - K\right]}{K\,L\ \frac{\varphi}{\beta}\left(\frac{\varphi}{\beta} - 1\right)\frac{K}{L^2}} = \frac{\frac{K^2}{L}\ \frac{\varphi}{\beta}\left(\frac{\varphi}{\beta} + 1\right)}{\frac{K^2}{L}\ \frac{\varphi}{\beta}\left(\frac{\varphi}{\beta} + 1\right)}$$

$$\sigma = 1 \tag{45}$$

verificando que la elasticidad de sustitución es igual a 1.

C. 2 Veamos ahora si la función de Producción Cobb-Douglas cumple con los requisitos neoclásicos. Pero antes de esto, es conveniente, para fines de simplicidad, hacer algunas modificaciones de forma a la función tal como se expresa en (25). Teníamos

$$Q = \gamma K^{-v/c} L^{v/c + v} \tag{25}$$

y ahora fijaremos

$$v = \varphi + \beta \tag{46}$$

y

$$c = \frac{\varphi + \beta}{-\beta} \tag{47}$$

Haciendo la sustitución de (46) y (47) en (25), nos queda

$$Q = \gamma K^{\beta} L^{\varphi} \tag{48}$$

con la cual podemos operar más fácilmente.

a) El primer criterio nos estipula que el producto marginal de los insumos debe ser positivo, y esto se cumple en la función Cobb-Douglas: Tenemos en primer términos el PMK y en segundo término el PML.

$$\begin{aligned} Q_K &= \beta \gamma K^{\beta - 1} \cdot L^{\varphi} \\ &= \beta (Q/K) > 0 \qquad (\beta > 0 \Leftrightarrow v > 0 ,\ c < 0) \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} Q_L &= \varphi \gamma K^{\beta} \cdot L^{\varphi - 1} \\ &= \varphi (Q/L) > 0 \qquad \left[\varphi = -\beta (c+1) > 0 \begin{cases} \beta > 0 \\ -1 < c < 0 \end{cases} \right] \end{aligned} \tag{50}$$

Los términos dentro de los paréntesis en (49) y (50) son obviamente positivos, al igual que β y φ, que aunque generalmente menores que uno, para $0 \leq v < 2$, son mayores que cero. En síntesis, ambas expresiones, - Q_k y Q_L, son positivas y la función cumple con el primer criterio.

b) En el segundo criterio Neoclásico se señala que la Productividad marginal debe decrecer (aunque siga siendo positiva) a mayores cantidades utilizadas del insumo en cuestión. Se había mostrado analíticamente como Q_{kk}, $Q_{LL} < 0$, y la función Cobb-Douglas es consecuente con esto:

$$Q_{kk} = \beta \left[\frac{\beta Q - Q}{K^2} \right]$$

$$= \beta(\beta - 1)\; Q/K^2 < 0 \qquad (51)$$

$$Q_{LL} = \varphi \left[\frac{\varphi Q - Q}{L^2} \right]$$

$$= \varphi(\varphi - 1)\; Q/L^2 < 0 \qquad (52)$$

Las expresiones dentro de los paréntesis en (51) y (52) son negativas, lo cual produce que las expresiones enteras lo sean, de donde concluyamos que esta condición se vea satisfecha, para los valores de v anotados arriba.

c) La tercer condición es llenada también por la función de tipo Cobb-Douglas. Este nos dice que la PMK debe aumentar al aumentar L, y, viceversa (Q_{kL}, $Q_{Lk} > 0$), además de que la función no debe especificar a priori el grado de economías de la escala, cosa que ya se demostró.

Ya que Q_{kL} es igual a Q_{Lk}, basta con que se demuestre que uno es positivo:

$$Q_{KL} = \beta \frac{K \varphi Q/L}{K^2}$$

$$Q_{KL} = \beta \varphi \frac{Q}{KL} > 0 \qquad (53)$$

Todos los términos en (53) son positivos, y por tanto el resultado también lo es.

d) El cuarto criterio nos dice que si queremos mantener el producto constante, al bajar la cantidad insumida de un factor, debe aumentarse la del otro. Equivale a probar que la Tasa Marginal de sustitución es negativa:

$$TMS = \frac{dk}{dL} = - \frac{Q_L}{Q_k}$$

$$TMS = - \frac{\varphi \; Q/L}{\beta \; Q/K} < 0 \; ; \; TMS = - \frac{\varphi}{\beta} \frac{K}{L} < 0 \qquad (54)$$

Es así como la función de producción Cobb-Douglas satisface el cuarto criterio Neoclásico; un signo negativo precede una expresión positiva, de donde la expresión completa también sea negativa.

Asimismo, este cuarto criterio se extiende más aún, para decirnos que la isocuanta debe ser cóncava hacia arriba, esto es, que $d^2 K/dL^2 > 0$

Para el caso en cuestión,

$$\frac{d^2 K}{d L^2} = \frac{d}{dL}\left(\frac{dK}{dL}\right) = \frac{d}{dL}\left(-\frac{\varphi}{\beta}\ \frac{K}{L}\right)$$

$$= -\frac{\varphi}{\beta}\left[\frac{L(-\varphi/\beta)\,K/L - K}{L^2}\right]$$

$$= \frac{\varphi}{\beta}\left(\frac{\varphi}{\beta} + 1\right)\frac{K}{L^2} > 0 \quad , \qquad (55)$$

ya que todos los términos de la expresión son positivos.

C.3 La elasticidad de produ cción de los insumos en una función de tipo Cobb-Douglas.- La elasticidad de producción con respecto al insumo - se define como el cambio porcentual en el producto entre el cambio porcentual del insumo en cuestión; p. ej., la elasticidad de producción del insumo t es (partiendo de que los demás factores no varían)

$$E_t - \frac{\text{razón de cambio proporcional de } Q \text{ con respecto a } t}{\text{razón de cambio porporcional de } t \text{ con respecto a } t}$$

o lo que es lo mismo

$$E_t = \left.\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta t}{t}}\right|\ \text{no-}t = \text{no-}t_o$$

$$E_t = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}/Q}{\frac{\partial t}{\partial t}/t} = \frac{Q}{t} \cdot \frac{t}{Q} = Q_t \cdot \frac{t}{Q} \qquad (56)$$

Así pues, la elasticidad de producción tanto de trabajo como de Capital (E_L y E_k , respectivamente) son

$$E_L = Q_L \cdot \frac{L}{Q}$$

$$= \varphi \frac{Q}{L} \cdot \frac{L}{Q} = \varphi \qquad (57)$$

y

$$E_k = Q_k \cdot \frac{K}{Q}$$

$$= \beta \frac{Q}{K} \cdot \frac{K}{Q} = \beta \qquad (58)$$

Resultado interesante si se contempla que φ y β son los exponentes a los que se encuentran elevados L y K, respectivamente.

C.4 Optimización en la producción bajo condiciones Cobb-Douglas. Ahora entramos a la parte en que nos toca señalar bajo qué condiciones (a) se maximiza el producto (sujeto a un presupuesto), (b) se minimiza el costo (dado un nivel de producto), y (c), se maximizan las Utilidades.

Las condiciones ya fueron sentadas en términos generales, tocándonos ahora hacerlo para el tipo de función en cuestión.

a) Maximización del producto sujeto a una restricción presupuestaria.- Las condiciones que hay que llenar son:

$$\lambda = \frac{Q_k}{P_k} = \frac{Q_L}{P_L}$$

como aquella condición necesaria, o de primer orden, y

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -P_k & -P_L \\ -P_k & Q_{kk} & Q_{kL} \\ -P_L & Q_{Lk} & Q_{LL} \end{vmatrix} > 0$$

o lo que es lo mismo

$$2\ Q_{kL} > Q_{kk}\quad P_L^{\ 2} + Q_{LL}\quad P_k^{\ 2}$$

como condición suficiente, o de segundo orden.

En cuanto a la satisfacción del primer requisito :

$$\lambda = \frac{\beta\ Q/K}{P_k} = \frac{\varphi\ Q/L}{P_L}$$

o similarmente (un interesante resultado),

$$\frac{K.P_k}{L.P_L} = \frac{\beta}{\varphi}$$

que nos dice que la distribución relativa del producto debe ser hecha de acuerdo con la razón de elasticidades de producción de ambos factores.

Por otra parte, la condición suficiente (o de segundo orden) es que

$$2\,\beta\,\varphi\ \frac{Q}{KL} > \beta(\beta-1).\frac{Q}{K^2}\cdot P_L^{\ 2} + \varphi\,(\varphi-1)\ \cdot\ \frac{Q}{L^2}\ \cdot\ P_k^{\ 2}$$

que puede ser reducida a

$$\frac{2\beta\varphi}{KL} > \beta(\beta-1)\cdot\left(\frac{P_L}{K}\right)^2 + \varphi(\varphi-1)\cdot\left(\frac{P_k}{L}\right)^2 \qquad (60)$$

b) Minimización del costo dado un nivel de producto.- Para efectos prácticos las condiciones de minimización de costo dado un nivel de producto son iguales a las anteriores de maximización de producto dado un nivel de costo o presupuesto.

Las condiciones de primer orden requieren en este caso que

$$\mu = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_L}{Q_L}$$

y las de segundo orden que

$$2Q_{kL} > Q_{kk}\, Q_L^2 + Q_{LL}\, Q_k^2$$

La condición necesaria se lleva pues, de la observación de la siguiente igualdad:

$$\frac{P_k}{\beta\, Q/K} = \frac{P_L}{\varphi\, Q/L}$$

que puede ser arreglada en

$$\frac{P_k \cdot K}{\beta} = \frac{P_L \cdot L}{\varphi} \qquad (61)$$

y que resulta alternativamente en

$$\frac{K \cdot P_k}{L \cdot P_L} = \frac{\beta}{\varphi}$$

que es igual a la condición de primer orden del inciso anterior. (Es en este sentido que se dice que las condiciones son semejantes).

La satisfacción de la siguiente desigualdad garantiza el cumplimiento de la condición de segundo orden:

$$\frac{2\beta\varphi}{KL} Q > \beta(\beta-1)\frac{Q}{K^2}\varphi^2\left(\frac{Q}{L}\right)^2 + \varphi(\varphi-1)\frac{Q}{L^2}\beta^2\left(\frac{Q}{K}\right)^2$$

que puede ser simplificado en

$$2\beta\varphi > \beta\varphi^2(\beta-1)(Q^2/KL) + \varphi\beta^2(\varphi-1)(Q^2/KL)$$

$$2 > \frac{Q^2}{KL}\left[\varphi(\beta-1) + \beta(\varphi-1)\right] \qquad (62)$$

c) Maximización de Utilidades.- Consideremos ahora el caso más general de Maximización de Utilidades y veamos bajo qué condiciones se maximizan estas en un mundo Cobb-Douglas.

Las condiciones de primer orden imponen que el empresario contrate unidades de capital y trabajo hasta que su Ingreso Marginal (de cada uno) sea igual a su Costo Marginal (en este caso constante en P_k y P_L, respectivamente, debido al supuesto de mercados competitivos). Estas condiciones se expresan como

$$P_k = P_q \cdot Q_k$$

y

$$P_L = P_q \cdot Q_L$$

y que al sustituir en ellas los valores apropiados, nos quedan

$$P_k = P_q \cdot \beta \frac{Q}{K} = \frac{Q \cdot P_q}{K} \beta \qquad (63)$$

y

$$P_L = P_q \cdot \varphi \frac{Q}{L} = \frac{Q \cdot P_q}{L} \varphi \qquad (64)$$

que pueden ser rearregladas, resultando

$$\frac{K \cdot P_k}{Q \cdot P_q} = \beta \qquad (65)$$

y

$$\frac{L \cdot P_L}{Q \cdot P_q} = \varphi \qquad (66)$$

que se interpreta de la siguiente manera: La participación que cada factor tiene del Ingreso total es igual a su elasticidad de producción, esto - es, al exponente al que se encuentra elevado cada factor.

Las condiciones de segundo orden son que

$$Q_{kk} < 0 \; ; \quad Q_{LL} < 0 \; ; \quad y \quad Q_{LL}\, Q_{KK} > Q_{KL}^{\;2} \qquad (67)$$

Se mostró más arriba que las primeras dos si se cumplen, y la tercera - puede ser expresada como

$$\beta(\beta - 1)\, \varphi\, (\varphi - 1) \frac{Q^2}{K^2 L^2} > \beta^2\, \varphi^2 \cdot \frac{Q^2}{K^2\; L^2}$$

y que se reduce a

$$1 > \beta + \varphi \qquad (68)$$

como la condición suficiente.

C. 5 Derivación de la Función de Costos bajo condiciones Cobb-Douglas en la producción.- Para proceder con la mencionada derivación volvamos a nuestra anterior notación (25)

$$Q = \gamma K^{-v/c} L^{v/c + v}$$

Aplicando la técnica estandar, se introduce además de la función de producción la senda de expansión y la ecuación definicional de costo (o presupuesto).

Así pues, tenemos tres ecuaciones de las cuales debemos hacer una en la que C sea una función de Q,

$$\begin{cases} \text{i)} & Q = \gamma K^{-v/c} L^{v/c + v} \\ \text{ii)} & \dfrac{P_k}{P_L} = \dfrac{L}{K} \left(\dfrac{-1}{1 + c} \right) \\ \text{iii)} & C = K \; P_k + L \; P_L \end{cases}$$

Despejando K y L en (iii) nos queda

$$K = \frac{C - L\,P_L}{P_k}$$

$$L = \frac{C - K.P_k}{P_L}$$

y en (ii)

$$L = - P_k \,.\, K \; (1 + c) / P_L$$

$$K = - L \,.\, P_L / P_k \; (1 + c)$$

e igualando, resulta

$$K = - C/P_K \cdot c$$

y

$$L = (1 + c) \; C / c \, P_L$$

Ahora, una vez que tenemos K y L despejados, podemos sustituirlos en (i), y así, nos queda finalmente

$$Q = \gamma \left(\frac{-C}{c\,P_K}\right)^{-v/c} \left[\frac{(1 - c)\,C}{c\,P_L}\right]^{v/c + v}$$

$$Q = \gamma \left(\frac{-1}{c\,P_K}\right)^{-v/c} C^{-v/c} \left[\frac{(1 + c)}{c\,P_L}\right]^{v/c + v} C^{v/c + v}$$

$$Q = \gamma \left(\frac{-1}{c\,P_K}\right)^{-v/c} \left(\frac{1 + c}{c\,R}\right)^{v/c + v} C^{v}$$

$$C = \gamma^{-1/v} \left(\frac{-1}{cP_K}\right)^{1/c} \left(\frac{1 + c}{cP_L}\right)^{-1/c - 1} Q^{1/v} \qquad (69)$$

como la función de costos de la empresa cuando la función de producción es del tipo Cobb-Douglas Irrestricto.

En el caso de la función Cobb-Douglas Restricta a grado de Homogeneidad igual a uno, y fijando $c = - 1/\alpha$, por simplicidad, la función de costos en (69) se reduce a

$$C = \gamma^{-1} \left(\frac{\alpha}{P_K}\right)^{-\alpha} \left(\frac{1 - \alpha}{P_L}\right)^{\alpha - 1} Q$$

o más sencillamente, a

$$C = \frac{P_K^{\alpha} \, P_L^{(1-\alpha)}}{\gamma \, \alpha^{\alpha} \, (1-\alpha)^{(1-\alpha)}} \, Q \qquad (70)$$

recordando desde luego, que $\underline{v}$ toma el valor de uno en este caso.

Nos toca ahora pasar a un nuevo tipo de funciones más general, las Funciones Homohypallágicas de Producción (o CES), que comprenden tanto a la Función de Coeficientes Fijos de Leontief como a la Función - Cobb-Douglas, en calidad de casos especiales

D. La Función de Producción Homohypallágica, o CES.

Como último punto del primer capítulo, derivamos la función de producción CES. En realidad, se comenzó a derivar desde que hablamos de la función del tipo Leontief y su derivación, así como cuando pasamos por la función Cobb-Douglas. La explicación de por qué esto, es que íbamos pasando por casos particulares mientras llegábamos a un caso de función más general (como ya lo hemos mencionado en algunas ocasiones).

Llegamos a una función, llamada CES (en virtud de exhibir una - elasticidad de sustitución constante para todos los valores de K/L), en la cual la relación de insumos y producto nos es dada por

$$Q = \gamma \left[c\, K^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha} \qquad (35)$$

donde, de nuevo, Q representa el producto, K y L el insumo de capital y trabajo, respectivamente, y γ, c, α, v, los parámetros de eficiencia, -

distribución, sustitución, y homogeneidad, en su orden.

Exploremos (como lo prometimos en el capítulo I) alrededor de la significación de estos parámetros. En primer lugar, se dice que γ es el - parámetro de eficiencia, o sea, que es en este parámetro en el cual toma cuerpo el cambio tecnológico (supondremos sólo cambio tecnológico neutral, que a la manera de Hicks se da cuando al no variar la razón de productividades, esto es, la tasa marginal de sustitución, no varía la razón de insumos, después del cambio tecnológico). Así pues, un cambio tecnológico positivo se manifiesta en un aumento en γ, lo cual debe conducir a un producto aumentado ¿cómo es ésto? Supongamos que las cantidades de insumos usadas no cambian. (así como los demás parámetros diferentes de γ), permaneciendo en K_o y L_o. Además supongamos que Q_o y γ_o son el producto y el parámetro de eficiencia antes del cambio, y Q_1 y γ_1 lo son - después del cambio tecnológico. Decimos además que $\gamma_1 > \gamma_o$, y que esto hará que $Q_1 > Q_o$, y eso es lo que hay que ver:

$$Q_o = \gamma_o \left[c\, K_o^{-\alpha} + (1 - c)\; L_o^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}$$

$$Q_1 = \gamma_1 \left[c\, K_o^{-\alpha} + (1 - c)\; L_o^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}$$

$$\frac{Q_1}{Q_o} = \frac{\gamma_1 \left[c\, K_o^{-\alpha} + (1 - c)\; L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}}{\gamma_o \left[c\; K_o^{-\alpha} + (1 - c)\; L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}}$$

$$\frac{Q_1}{Q_o} = \frac{\gamma_1}{\gamma_o} \quad ,$$

pero $\gamma_1 > \gamma_o$, o lo que es lo mismo

$$\gamma_1 / \gamma_0 > 1$$

de donde

$$\frac{Q_1}{Q_o} = \frac{\gamma_1}{\gamma_o} > 1$$

y por lo tanto

$$Q_1 > Q_o \quad ,$$

y se corrobora pues, que el cambio tecnológico neutral incide sobre γ, elevándolo.

Una propiedad de esta función de producción es que nos indica el grado de homogeneidad que la caracteriza, y que está dado por v. Verifiquemos esto encontrando el grado de homogeneidad que posee (35).

$$f(K,L) = \gamma \left[c K^{-\alpha} + (1 - c) L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \gamma \left[c (\lambda K)^{-\alpha} + (1 - c) (\lambda L)^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \gamma \left[\lambda^{-\alpha} c K^{-\alpha} + (1 - c) L^{-\alpha} \lambda^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \gamma \left\{ \lambda^{-\alpha} \left[c K^{-\alpha} + (1 - c) L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha} \right\}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{v} \gamma \left[c K^{-\alpha} + (1 - c) L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{v} f(K, L) \qquad (71)$$

Así pues, la función CES, tal como está escrita en (35), es homogénea de grado v. Esta característica es muy importante, ya que tiene implicaciones que van un poco más allá de la mera especulación teórica, pues es bien sabida la relevancia que, para fines de programación del desarrollo económico, sobre todo, tiene el conocer el grado de economías de la escala que posee la función de producción de las industrias particulares.

Por otra parte, se afirma que c es el parámetro de distribución. Para demostrar que sí lo es, tenemos que seguir el mismo proceso usado en la función Cobb-Douglas, esto es, debemos supone que a los factores se les paga de acuerdo con su productividad marginal y que (de nuevo por razónes de simplicidad) el numerario es en unidades de producción y el grado de homogeneidad es uno.

Tenemos entonces

$$P_k = Q_k$$

$$P_L = Q_L$$

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{Q_k}{Q_L}$$

$$Q_K = (c/\gamma^{\alpha})\ (Q/K)^{\alpha+1}$$

$$Q_L = \left[(1-c)/\gamma^{\alpha}\right]\ (Q/L)^{\alpha+1}$$

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{(c/\gamma^{\alpha})\ (Q/K)^{\alpha+1}}{\left[(1-c)/\gamma^{\alpha}\right]\ (Q/L)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{c}{1-c}\cdot\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha+1}$$

$$\frac{K\ .\ P_k}{L\ .\ P_L} = \frac{c}{1-c}\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha} \qquad (72)$$

Del resultado en (72), además de corroborarse que c efectivamente es el parámetro de distribución, se hace notorio que la facilidad con que se puedan sustituir los factores también afecta la participación relativa de los mismos. En el caso de $\sigma = 1$, α se hace cero, y la expresión se reduce a aquella de la función Cobb-Douglas. (Las ces en la función Cobb-Douglas son diferentes a las de la CES.)

En cualquier caso, a mayor c mayor participación relativa del capital, y viceversa, a menor c menor participación relativa del capital y mayor del trabajo. Sin embargo, c tiene tanto un límite superior como uno inferior, que son uno y cero. Cuando c es cero, sólo el trabajo tiene una productividad positiva, y por tanto sólo él recibe remuneración. Por el contrario, cuando c es uno, sólo el capital recibe remuneración, ya que la productividad del trabajo es cero.

Sin embargo, ya nos estamos adelantando al decir que α tiene que ver con la elasticidad de sustitución (σ), e inclusive habíamos implicado que $\sigma = 1/(1 + \alpha)$. Veamos por qué efectivamente ésta es la relación entre σ y α.

D.1 La elasticidad de sustitución en una función CES.- Esta es la característica más importante de este tipo de funciones. La elasticidad de sustitución en ellas es constante a lo largo de toda la isocuanta y, lo notable, puede tomar cualquier valor no negativo, lo cual la califica como comprehensiva de las funciones de producción Coeficientes Fijos de Leontief y Cobb-Douglas.

Busquemos, para apoyar lo anterior, la elasticidad de sustitución de la función CES. Se definió σ en términos generales como

$$\sigma = \frac{\frac{dk}{dL}\left(L \frac{dk}{dL} - K\right)}{KL \frac{d^2 K}{dL^2}} \tag{8}$$

Es necesario entonces, en primer lugar, encontrar dK/dL y d^2K/dL^2, para sustituirlos en (8)

$$dK/dL = - Q_L / Q_k$$

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{\frac{1-c}{\gamma^{\alpha}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{\alpha + 1}}{\frac{c}{\gamma^{\alpha}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{\alpha + 1}} = - \frac{1-c}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha + 1} \tag{73}$$

y

$$\frac{d^2 K}{dL^2} = \frac{d}{dL}\left[- \frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha + 1}\right]$$

$$\frac{d^2 K}{dL^2} = - \frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{L^2}\right)\left[L \frac{dK}{dL} - K\right](\alpha + 1)$$

$$\frac{d^2 K}{dL^2} = \frac{1-c}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha + 1}\left(\frac{1}{L}\right)\left[\frac{1-c}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} + 1\right](\alpha + 1) \tag{74}$$

Sustituyendo (73) y (74) con (8),

$$\sigma = \frac{-\frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha + 1}\left[- L \frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha + 1} - K\right]}{KL \frac{(1-c)}{c}(1+\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha + 1}\left(\frac{1}{L}\right)\left[\frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} + 1\right]}$$

y simplificando la expresión mediante eliminación de términos, σ se reduce a

$$\sigma = \frac{1}{1+\alpha} \tag{75}$$

y queda demostrado que α es el parámetro de sustitución.

Siendo α el parámetro de sustitución, es conveniente examinar los posibles valores que puede tomar. Para tal fin sólo necesitamos despejar α de la ecuación (75) y, partiendo de que σ sólo puede tomar valores comprendidos entre cero e infinito, podemos encontrar fácilmente los límites.

Cuando σ se aproxima al caso límite de cero:

$$\lim_{\sigma \to 0} \alpha = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1-\sigma}{\sigma}$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \alpha = \infty \tag{76}$$

y cuando σ se aproxima a ∞

$$\lim_{\sigma \to \infty} \alpha = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{\sigma} - 1$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} \alpha = -1 \tag{77}$$

Si bien puede ser observado un tanto intuitivamente que la función CES es una función general que comprende tanto a la del tipo Leontief como a la Cobb-Douglas, es necesario ir un poco más allá.

Arrow, Chenery, Minhas, y Solow, en su pionero estudio ⟨ 2 ⟩, muestran como mediante la aplicación de los teoremas de valor medio, se sigue de su definición de función de valor medio $-\infty$, que el

$$\lim_{\alpha \to \infty} \gamma \left[cK^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]^{-1/\alpha}$$

$$= \min (K/\gamma^{-1}, L/\gamma^{-1}) \tag{78}$$

que no es sino la misma función Coeficientes Fijos de Leontief, de la que ya se mostró que sus isocuantas son líneas quebradas rectangulares, y - que, de la manera en que está escrita (36), los vértices de las isocuantas yacen sobre un vector recto que tiene una inclinación de 45 grados y que parte del origen. Desde luego, generalmente las unidades en que se miden o existen los factores difieren, y entonces este problema es solucionado fácilmente cambiando la escala.

Por otra parte, nosotros podemos ver que cuando α toma el valor de cero, la función CES no es sino la función Cobb-Douglas . Sin embargo, no podemos aplicar la teoría convencional de límites, ya que se nos produce una forma indeterminada, y la solución la hallamos encontrando logaritmos y luego aplicando la regla de L'Hospital:

$$Q = \gamma \left[c\, K^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha}$$

$$\ln Q = \ln \gamma - \frac{v \ln \left[cK^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha} \right]}{\alpha} \tag{79}$$

Sólo el segundo término del lado derecho de la igualdad contiene α , así que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{v \ln \left[c\, K^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha} \right]}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{d}{d\alpha} \left\{ v \ln \left[c\, K^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha} \right] \right\}}{\frac{d}{d\alpha} (\alpha)}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{v \dfrac{-c K^{-\alpha} \ln K - (1-c) L^{-\alpha} \ln L}{c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha}}}{1}$$

$$= -v\, c \ln K - v\,(1-c) \ln L$$

e incorporando de nuevo la expresión a (79) ,

$$\ln Q = \ln \gamma + vc \ln K + v\,(1-c) \ln L$$

y aplicando antilogaritmos, tenemos

$$Q = \gamma\, K^{vc}\; L^{v\,(1-c)} \qquad (80)$$

la función de producción Cobb-Douglas (en una forma diferente), y así queda demostrado su carácter de función más general.

D.2 Hablaremos ahora de las propiedades neoclásicas de la función de producción CES. Hay cuatro criterios que debe cumplir la función de tal manera que pueda decirse que posee propiedades Neoclásicas, que ya han sido expuestos y son:

a) Tanto la Productividad Marginal del capital como la del trabajo deben ser positivas, esto es, que Q_K y Q_L sean mayores que cero. Veamos los valores que adoptan, suponiendo por simplicidad que v es igual a uno (es posible hacer este supuesto, ya que es de esperarse que v normalmente sea positiva:

$$Q_K = -1/\alpha\, \gamma \left[c\,K^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha}\right]^{-1/\alpha - 1} (-\alpha\, c\, K^{-\alpha - 1})$$

$$= c\,K^{-\alpha - 1}\, \gamma^{-\alpha} \gamma^{\alpha} \left[c\,K^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha}\right]^{-\alpha/\alpha} Q$$

$$= c\,\gamma^{-\alpha}\, Q^{\alpha + 1} / K^{\alpha + 1}$$

$$= \frac{c}{\gamma^{\alpha}} \left(\frac{Q}{K}\right)^{\alpha + 1} > 0 \qquad (81)$$

$$Q_L = -1/\alpha\, \gamma \left[cK^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha}\right]^{-1/\alpha - 1} (1-c)\,(-\alpha L^{-\alpha - 1})$$

$$= (1-c)\,\gamma^{-\alpha} \gamma^{\alpha} \left[c\,K^{-\alpha} + (1-c)\, L^{-\alpha}\right]^{-\alpha/\alpha} Q\, L^{-\alpha - 1}$$

$$= (1-c)\,\gamma^{-\alpha}\, Q^{\alpha + 1} / L^{\alpha + 1}$$

$$= \frac{(1-c)}{\gamma^{\alpha}} \left(\frac{Q}{L}\right)^{\alpha + 1} > 0 \qquad (82)$$

De (81) y (82), vemos que claramente Q_K y Q_L son positivas, ya que es de esperarse que normalmente todos los términos que están contenidos en ambas sean mayores que cero, y por tanto, la función CES satisface el primer criterio.

b) El segundo criterio nos establece que las productividades marginales sean una función monotónica decreciente positiva, esto es, que - - $\partial Q^2/\partial K^2, \partial Q^2/\partial L^2 > 0$. Tenemos entonces que (fijando además u = K/L)

$$Q_{kk} = (c/\gamma^{\alpha})\,(Q/K)^{\alpha}\,(1/K)^2 \left[K(c/\gamma^{\alpha})\,(Q/K)^{\alpha + 1} - Q\right]$$

$$= (c/\gamma^{\alpha})\,(Q^2/K^{2+\alpha}) \left[(K/Q)\,(c/\gamma^{\alpha})\,(Q/K)^{\alpha + 1} - 1\right]$$

$$= (c/\gamma^{\alpha})\,(Q^2/K^{2+\alpha}) \left[(c/\gamma^{\alpha})\,(Q/K)^{\alpha} - 1\right]$$

$$= (c/\gamma^{\alpha})\,(Q^2/K^{2+\alpha}) \left[\frac{1}{\{(1-c)/c\}\, u^{\alpha} + 1} - 1\right] \qquad (83)$$

y como

$$\left[(1-c) / c\right] \quad u^{\alpha} > 0$$

entonces

$$Q_{kk} < 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Q_{LL} &= \frac{(1-c)}{\gamma^{\alpha}} \left(\frac{Q}{L}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{L}\right)^{2} (L\, Q_L - Q) \\ &= \frac{(1-c)}{\gamma^{\alpha}} \left(\frac{Q}{L}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{L}\right)^{2} Q \left[\frac{L}{Q}\; Q_L - 1\right] \\ &= \frac{(1-c)}{\gamma^{\alpha}} \left(\frac{Q}{L}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{L}\right)^{2} Q \left[\frac{L}{Q}\, \frac{(1-c)}{\gamma^{\alpha}} \left(\frac{Q}{L}\right)^{\alpha+1} - 1\right] \\ &= \frac{(1-c)}{\gamma^{\alpha}} \left(\frac{Q}{L}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{1}{L}\right) \left[\frac{1}{c/(1-c) \quad (1/u)^{2} + 1} - 1\right] \qquad (84) \end{aligned}$$

y ya que

$$\left[c/(1-c)\right] \cdot (1/u)^{2} > 0$$

se sigue que

$$Q_{LL} < 0 ,$$

de donde podamos asegurar que la función de producción CES posee esta segunda propiedad Neoclásica.

La anterior condición no se sostiene para altos valores de v, una vez que se acepta que $v \neq 1$. Es de esperarse que en cualquier modelo - Neoclásico "razonable" la existencia de "fuertes" economías de la escala prevengan una declinación en el PML. Por lo tanto, la posibilidad de que la función CES no satisfaga este criterio, no es perturbadora.

c) El tercer requisito que debe cumplir es que, cuando se aumente la cantidad utilizada de un factor, la productividad marginal del otro debe aumentar. Esto se expresa de otro modo diciendo que la segunda derivada parcial cruzada de Q con respecto a K y L (o lo que es lo mismo, con respecto a L y K sea positiva).

$$Q_{kL} = (c/\gamma^{\alpha})\ (Q/K)^{\alpha}\ (1/K)^2\ K\ Q_L$$

$$= (c/\gamma^{\alpha})\ (Q/K)^{\alpha}\ (1/K)\ \gamma^{-\alpha}(1-c)\ (Q/L)^{\alpha+1}$$

$$= c\,(1-c)\ .\times.\ (1/\gamma^{2\alpha})\ Q^{\alpha}\ (Q/L\,K)^{\alpha+1} > 0 \qquad (85)$$

Todos los términos en (85) son positivos, así que la expresión entera también lo sea.

Por otra parte, cuando se aumenta el capital, la productividad marginal del trabajo también se eleva:

$$Q_{Lk} = (1-c)\ \gamma^{-\alpha}(Q/L)^{\alpha}\ (1/L)^2\ L\ Q_L$$

$$= (1-c)\ \gamma^{-\alpha}(Q/L)\ (1/L)\ c\ \gamma^{-\alpha}(Q/K)^{\alpha+1}$$

$$= c(1-c)\ (1/\gamma^{2\alpha})\ Q^{\alpha}\ (Q/Lk)^{\alpha+1} > 0 \qquad (86)$$

El efecto es el mismo, ya que por definición las dos derivadas parciales son iguales ($Q_{Lk} = Q_{kL}$).

En cuanto a los rendimientos de la escala, ya se demostró que la función no especifica los mismos a priori, y permite que tomen cualquier valor $\underline{v}$.

d) La cuarta propiedad Neoclásica que se busca ver si la función posee es que la tasa marginal de sustitución sea negativa (TMS 0) y que la curva isocuanta sea cóncava hacia arriba (esto es, que $d^2 K/d L^2$ 0).

Derivando entonces K con respecto a L

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{Q_L}{Q_k}$$

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{(1-c)}{c}\frac{\gamma^{-\alpha}}{\gamma^{-\alpha}}\frac{(Q/L)^{\alpha+1}}{(Q/K)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha+1} < 0$$

los dos términos (que son positivos) van precedidos por un signo menos, de donde se ve que efectivamente la TMS < 0 .

Ya derivamos anteriormente la TMS con respecto a L (74), y nos había quedado:

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d}{dL}\left(\frac{dK}{dL}\right) = \frac{d}{dL}\left[-\frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha+1}\right]$$

$$= (\alpha+1)\frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{L}\right)\left[\frac{(1-c)}{c}\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}+1\right] > 0 ,$$

pues todos los términos de la expresión son positivos.

Queda entonces demostrado que la función CES posee todas las propiedades Neoclásicas ya mencionadas, y entonces podemos asignarle el calificativo de "normal".

D.3 La elasticidad de producción de los insumos en una función de tipo CES.- Definimos anteriormente la elasticidad de producción de los insumos como el cambio porcentual en el producto entre el cambio porcentual del insumo en cuestión, y esto lo expresamos como

$$E_t = Q_t \cdot (t/Q) .$$

En esta forma, la elasticidad de producción del capital es

$$E_k = Q_k \ (K/Q)$$

$$E_k = (vc/\gamma^{\alpha/v})\ Q^{\alpha/v+1}\ K^{-\alpha-1}\ (K/Q)$$

$$E_k = \frac{vc}{\gamma^{\alpha/v}}\ \frac{Q^{\alpha/v}}{K^{\alpha}} = \frac{vc}{\gamma^{\alpha/v}}\left(\frac{Q^{1/v}}{K}\right)^{\alpha} \qquad (87)$$

y la elasticidad de producción del trabajo es

$$E_L = (L/Q)\ Q_L$$

$$E_L = (L/Q)\ v(1-c)\gamma^{-\alpha/v}\ Q^{\alpha/v + 1}\ L^{\alpha + 1}$$

$$E_L = \frac{v\,(1-c)}{\gamma^{\alpha/v}} \left(\frac{Q^{1/v}}{L}\right)^{\alpha} \qquad (88)$$

Es de apreciarse que cualquiera de los parámetros forma parte de la expresión de elasticidad de producción, de donde se infiere que cualquier cambio en los parámetros conduce a un cambio en la misma.

D.4 Optimización en la producción bajo condiciones CES.- Examinaremos para este tipo de funciones cuáles son las condiciones particulares bajo las cuales se logra la optimización en la producción y esto, de la misma forma que se procedió con la Cobb-Douglas, se hará viendo cuáles son las condiciones bajo las cuales: (a) se maximiza el producto, sujeto a un presupuesto; (b) se minimiza el costo, sujeto a un nivel de producto; y (c) se maximizan las utilidades de la empresa.

(a) Maximización del producto bajo una restricción presupuestaria. De acuerdo con las condiciones derivadas en la Sección A de este capítulo, las condiciones de primer orden se expresan como

$$\lambda = \frac{Q_k}{P_k} = \frac{Q_L}{P_L}$$

y las condiciones de segundo orden mediante el Hessiano bordeado

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -P_k & -P_L \\ -P_k & Q_{kk} & Q_{kL} \\ -P_L & Q_{Lk} & Q_{LL} \end{vmatrix} > 0$$

Sustituyendo en las expresiones los valores correspondientes a este tipo de función, tenemos como condición de primer orden

$$\frac{\frac{v\,c}{\gamma^{\alpha/v}} \cdot \frac{Q^{\alpha/v + 1}}{K^{\alpha+1}}}{P_k} = \frac{\frac{v(1-c)}{\gamma^{\alpha/v}} \frac{Q^{\alpha/v + 1}}{L^{\alpha+1}}}{P_L}$$

la cual, después de multiplicar ambos lados de la ecuación por $\gamma^{\alpha/v} / v \; Q^{\alpha/v + 1}$ se simplifica en

$$\frac{c}{P_k \; K^{\alpha+1}} = \frac{(1-c)}{P_L \; L^{\alpha+1}}$$

y al rearreglarla nos queda (89)

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{c}{(1-c)} \left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha+1}$$

que nos dice que la combinación de factores debe ser aquella que satisfaga la igualdad.

La condición de segundo orden viene siendo en términos "simplificados"

$$2\,c\,(1-c)\,(\alpha+v)\,(Q/\gamma)^{\alpha/v}$$

$$> \frac{(\alpha+1)(c-1)\,P_k^2}{L\,K^{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+v)\,(1-c)^2\,Q^{\alpha/v}\,P_k^2}{\gamma^{\alpha/v}\,(L\,K)^{\alpha+1}}$$

$$+ \frac{(\alpha+v)\,c^2\,Q^{\alpha/v}\,L^{\alpha+1}\,P_L^2}{\gamma^{\alpha/v}\,K^{3\alpha+3}} = \frac{c\,(\alpha+1)\,L^{\alpha+1}\,P_L^2}{K^{2\alpha+3}} \qquad (90)$$

El cumplimiento de esta condición (supuesta la observación de la de primer orden) nos garantiza que se está maximizando el producto, dada la restricción presupuestaria.

(b) Minimización del costo, dado un nivel de producto. Las condiciones de primer orden requieren que

$$\mu = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_L}{Q_L}$$

y las de segundo orden que

$$2\, Q_{kL} > Q_{kk} \; Q_L^{\,2} + Q_{LL} \; Q_k^{\,2}$$

Para satisfacer la condición de primer orden hay entonces que hacer la igualación

$$\frac{P_k}{\dfrac{vc}{\gamma^{\alpha/v}} \times \dfrac{Q^{\alpha/v + 1}}{K^{\alpha + 1}}} = \frac{P_L}{\dfrac{v(1-c)}{\gamma^{\alpha/v}} \; \dfrac{Q^{\alpha/v + 1}}{L^{\alpha + 1}}}$$

y multiplicando ambos lados por

$$\frac{v\, Q^{\alpha/v + 1}}{\gamma^{\alpha/v}}$$

(91) se simplifica en

$$\frac{P_k \quad K^{\alpha + 1}}{c} = \frac{P_L \quad L^{\alpha + 1}}{(1 - c)}$$

y en rearreglándola nos queda

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{c}{(1-c)} \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha+1} \tag{92}$$

como la expresión simplificada de la condición de primera orden para minimizar el costo cuando ya se ha fijado un nivel Q_o de producto. Es de notarse que esta condición es idéntica a la que se obtuvo en el inciso anterior.

La condición de segundo orden también es idéntica a la del inciso anterior, previo supuesto que a los factores se les pague de acuerdo con su productividad marginal. Esto es, la condición se estipula como

$$2\ Q_{kL} > Q_{kk}\ Q_L^2 + Q_{LL}\ Q_k^2 \tag{93}$$

y si

$$P_k = Q_k$$
$$P_L = Q_L$$

entonces, sustituyendo en (93) nos queda

$$2\ Q_{kL} > Q_{kk}\ P_L^2 + Q_{LL}\ P_k^2$$

que es idéntica a la que corresponde a maximización de producto, dado un nivel de costo (91), y que por tanto no es necesario volver a escribir.

(c) Maximización de utilidades.- Las condiciones de primer orden para maximizar utilidades son

$$P_k = P_q \cdot Q_k$$
$$P_L = P_q \cdot Q_L$$

y en un mundo CES son, más específicamente,

$$P_k = P_q \cdot Q_k$$
$$P_L = P_q \cdot Q_L$$

y en un mundo CES son, más específicamente,

$$P_k = P_q \frac{vc}{\gamma^{\alpha/v}} \frac{Q^{\alpha/v+1}}{K^{\alpha+1}} \tag{94}$$

y

$$P_L = P_q \frac{v(1-c)}{\gamma^{\alpha/v}} \frac{Q^{\alpha/v+1}}{K^{\alpha+1}} \tag{95}$$

las cuales nos indican que para que el empresario contrate factores en tal cantidad que en la última unidad empleada de cada uno de ellos, el costo marginal de contratación (P_k y P_L) sea igual al ingreso marginal que producen (P_q . PMK y P_q . PML), es necesario cumplir con (94 y (95).

Las condiciones de segundo orden son que

$$Q_{kk} < 0 \quad ; \quad Q_{LL} < 0; \quad y \quad Q_{LL} \; Q_{KK} > Q_{kL}^2$$

ya se vio que las primeras dos (Q_{KK} , $Q_{LL} < 0$) siempre se cumplen, entonces todo se reduce a que se observe la tercera.

Las condiciones de segundo orden son pues,

$$\left[\frac{v(\alpha+1)\ (1-c)^2}{\gamma^{2\alpha/v}}\ \frac{Q^{2\alpha/v+1}}{L^{2\alpha+2}} - \frac{v\ (\alpha+1)\ (1-c)}{\gamma^{\alpha/v}}\ \frac{Q^{\alpha/v+1}}{L^{\alpha+2}}\right]$$

$$\times \left[\frac{c^2\ v\ (\alpha+v)}{\gamma^{2\alpha/v}}\ \frac{Q^{2\alpha/v+1}}{K^{2\alpha+2}} - \frac{cv\ (\alpha+1)}{\gamma^{\alpha/v}}\ \frac{Q^{\alpha/v+1}}{K^{\alpha+2}}\right]$$

$$> \left[\frac{v(1-c)c\ (\alpha+v)\ Q^{2\alpha/v+1}\ K^{\alpha+1}}{\gamma^{2\alpha/v}\ L^{\alpha+1}}\right]^2$$

que puede ser reducidas a

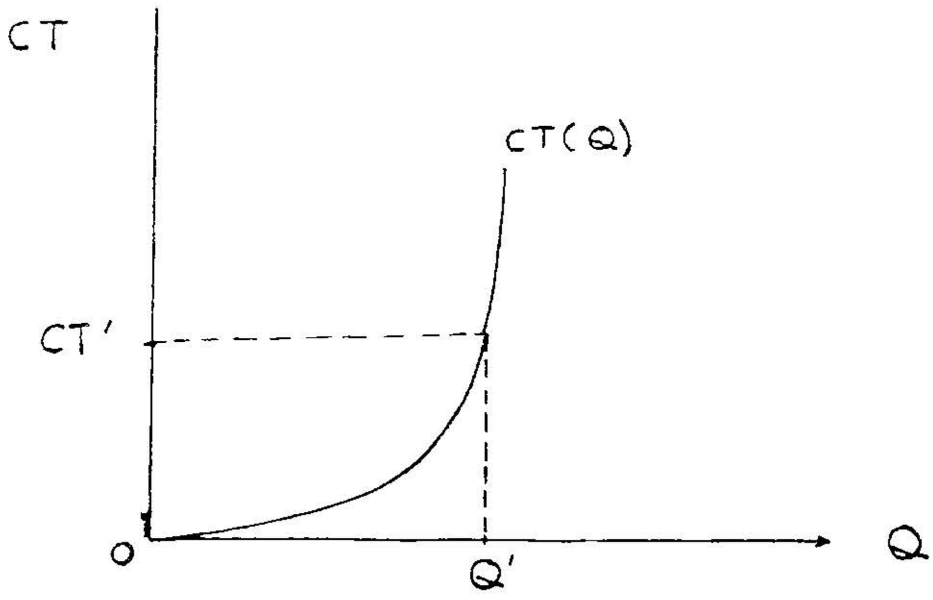
$$\left[-(\alpha+1) + \frac{(\alpha+1)\ (1-c)\ Q^{\alpha/v}}{\gamma^{\alpha/v}\ L}\right]\left[\frac{c\ (\alpha+v)\ Q^{\alpha/v}}{\gamma^{\alpha/v}\ K^{\alpha}} - (\alpha+1)\right]$$

$$> \frac{c(1-c)\ (\alpha+v)^2\ K^{3\alpha+4}}{L^{\alpha}}\left(\frac{Q}{\gamma}\right)^{2\alpha/v}, \qquad (96)$$

para entonces sí poder garantizar que se están maximizando las utilidades.

Las condiciones a las que se arribó en los primeros dos incisos, sólo nos aseguran que se trabaje exactamente sobre la curva de costo total mínimo de la empresa, mientras que la última condición nos asegura (al satisfacerla) que se trabaja en aquel punto en que la diferencia entre ingresos totales y costos totales es máxima.

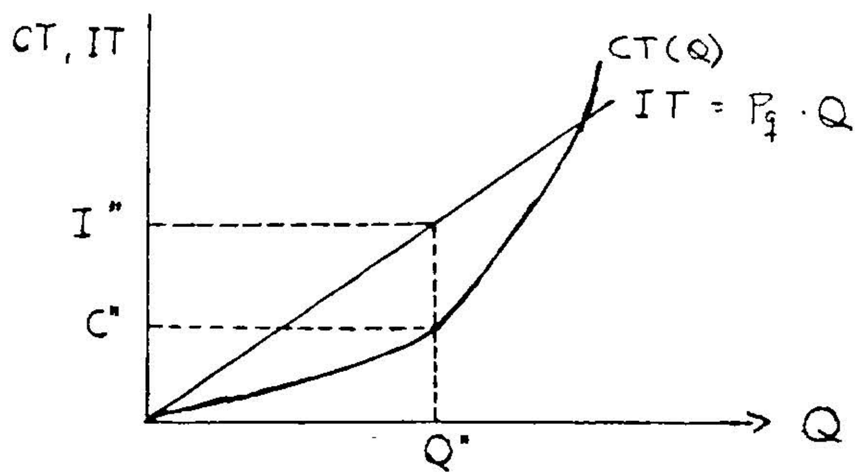
En términos diagramáticos, la primera condición nos dice cómo obtener el máximo



Gráfica 2.4

producto posible (Q') cuando se tiene CT' de presupuesto. La misma gráfica 2.4 nos sirve para ver lo que nos dicen las segundas condiciones. Estas nos dan el criterio para hacer mínimo el presupuesto a costo total (CT') cuando se fija como meta un nivel de producción Q'.

Dibujemos una gráfica que nos permita ver lo que nos aportan las últimas condiciones arribadas (de maximización de utilidades):



Gráfica 2.5

Estas condiciones nos dan el criterio necesario y suficiente para producir en Q", nivel de producto al cual la diferencia entre Ingresos tota les (IT) y costos totales (CT) es máxima, esto es, donde el nivel de utilidades es máximo (=IT' - CT').

D.5 Derivación de la Función de Costos bajo condiciones CES en la producción.- Ya hemos hablado de la función de costos en términos generales, e inclusive la derivamos para la función Cobb-Douglas. Ahora debemos derivarla para la función CES y, de nuevo aplicaremos la técnica estandar para derivarla.

Tenemos entonces tres ecuaciones, dadas por (i) la función de producción, (ii) la senda de expansión, y (iii) la ecuación de costos (supondremos, de nuevo por simplicidad, que la función de producción es homogénea de grado uno, esto es, v = 1:

(i) $$Q = \gamma \left[c\, K^{-\alpha} + (1-c)\; L^{-\alpha} \right]^{-1/\alpha}$$

(ii) $$\frac{P_k}{P_L} = \left(\frac{1-c}{c} \right) \left(\frac{L}{K} \right)^{\alpha + 1}$$

(iii) $$C = K \,.\, P_k + L \,.\, P_L$$

Despejemos pues K y L en (iii),

$$K = \frac{C - L \,.\, P_L}{P_k} \qquad (97)$$

$$L = \frac{C - K \,.\, P_k}{P_L} \qquad (98)$$

y en (ii),

$$K = \left[\frac{P_L\ (1-c)}{cP_k}\right]^{1/(\alpha+1)} L \tag{99}$$

$$L = \left[\frac{c\ P_k}{(1-c)\ P_L}\right]^{1/(\alpha+1)} K \tag{100}$$

para ahora sustituir (99) en (97), quedando

$$\frac{C - L P_L}{P_k} = \left[\frac{(1-c)\ P_L}{cP_k}\right]^{1/(\alpha+1)} L \tag{101}$$

y (100) en (98), resultando

$$\frac{C - K P_k}{P_L} = \left(\frac{cP_k}{(1-c)\ P_L}\right)^{1/(\alpha+1)} K \tag{102}$$

Despejando L y K en (101) y en (102), respectivamente,

$$L = \frac{C(cP_k)^{1/(\alpha+1)}}{P_L^{1/(\alpha+1)}\ (1-c)^{1/(\alpha+1)} + P_L\ (cP_k)^{1/(\alpha+1)}}$$

$$K = \frac{C\ \ (1-c)^{1/(\alpha+1)}\ \ P_L^{\ 1/(\alpha+1)}}{P_k^{1/(\alpha+1)}\ c^{1/(\alpha+1)} + P_k\ P_L^{1/(\alpha+1)}\ (1-c)^{1/(\alpha+1)}}$$

las cuales se pueden simplificar si recordamos que $\sigma = 1/(\alpha+1)$ y la sus<u>s</u>tituimos en ellas:

$$L = \frac{c^{\sigma}\ P_k^{\sigma}}{(1-c)^{\sigma} P_L^{\sigma} + P_L\, c^{\sigma}\ P_k^{\sigma}}\ C \tag{103}$$

$$K = \frac{(1-c)^{\sigma}\ P_L^{\sigma}}{c^{\sigma}\ P_k^{\sigma} + P_k\ (1-c)^{\sigma}\ P_L^{\sigma}}\ C \tag{104}$$

Una vez hecho esto, pasamos a sustituir (103) y (104) en (i), la función de producción, para después despejar C:

$$Q = \gamma \left[c \left(\frac{(1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma}}{c^{\sigma} \; P_k{}^{\sigma} + P_k \; (1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma}} C \right)^{-\alpha} + (1-c) \left(\frac{c^{\sigma} \; P_k{}^{\sigma}}{(1-c)^{\sigma} P_L{}^{\sigma} + P_L \; c^{\sigma} \; P_k{}^{\sigma}} C \right)^{-\alpha} \right]^{-1/\alpha}$$

$$\left(\frac{Q}{\gamma}\right)^{-\alpha} = \left[c \left(\frac{(1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma}}{c^{\sigma} P_k{}^{\sigma} - P_k \; (1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma}} \right)^{-\alpha} + (1-c) \left(\frac{c^{\sigma} P_k{}^{\sigma}}{(1-c)^{\sigma} P_L{}^{\sigma} - P_L \; c^{\sigma} P_k{}^{\sigma}} \right)^{-\alpha} \right] C^{-\alpha}$$

$$C = \frac{1}{\gamma} \left[c \left(\frac{(1-c)^{\sigma} P_L{}^{\sigma}}{c^{\sigma} P_k{}^{\sigma} + P_k \; (1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma}} \right)^{-\alpha} + (1-c) \left(\frac{c^{\sigma} \; P_k{}^{\sigma}}{(1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma} - P_L \; c^{\sigma} P_k{}^{\sigma}} \right)^{-\alpha} \right]^{1/\alpha} Q \qquad (105)$$

y así, por fin tenemos la función de costos para una función de producción CES Restricta. En (105) podemos observar que C (el costo total) es una función de Q (el producto), y que en la relación funcional entran en el coeficiente todos los parámetros y dos constantes, P_k y P_L. Como el coeficiente no varía con variaciones en Q , entonces es una constante, y podemos escribir (105) más sencillamente como

$$C = a \, . \, Q \qquad (106)$$

donde

$$a = \frac{1}{\gamma} \left[c \left(\frac{(1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma}}{c^{\sigma} P_k{}^{\sigma} + (1-c)^{\sigma} P_k \; P_L{}^{\sigma}} \right)^{-\alpha} + (1-c) \left(\frac{c^{\sigma} \; P_k{}^{\sigma}}{(1-c)^{\sigma} \; P_L{}^{\sigma} - P_L c^{\sigma} \; P_k{}^{\sigma}} \right)^{-\alpha} \right]^{1/\alpha}$$

Es fácil ver entonces, que en este caso de función CES Restricta, la curva de costos asume la forma de una línea recta que parte del origen y cuya pendiente es igual a a .

CAPITULO III

LA ESTIMACION DE LA FUNCION DE PRODUCCION Y SUS IMPLICACIONES

Llega aquí a su parte más importante este trabajo: la estimación de la función de producción. En los anteriores capítulos se derivaron aquellas funciones que por sus rasgos nos eran de interés, y se habló de características generales que cada una poseía y cuáles eran las condiciones bajo las cuales se optimizaba la producción en presencia de cada una de ellas. Lo anterior fue posible gracias al grado de abstracción que envuelve la función de producción. Este grado de abstracción posibilita, además, la estimación de la función de producción de una empresa, industria, sector, o país, y esto provee al economista de una poderosa arma de análisis para el diseño de política económica.

La industria escogida en este trabajo, para dar un ejemplo, del proceso de estimación de la función de producción, es la industria cervecera mexicana. La razón principal es la disponibilidad de los datos necesarios para hacer los cálculos que se requieren. Se logró obtener información de los insumos y el producto en los últimos 25 años, lo cual desde ahora sugiere que es una estimación intertemporal la que hemos hecho.

A. La estimación de la función de producción.

Nos interesa estimar la función de producción de la industria cervecera mexicana, y hemos de buscar que exista un mínimo de restricciones apriorísticas en la misma (p. ej., suponer competencia perfecta, rendimientos constantes, un parámetro de distribución fijo en un valor, o un grado de elasticidad de sustitución determinado). Sin embargo, es prácticamente imposible (a nuestro alcance) hacer estimaciones libres de estos supuestos, y así, suponemos a priori que la elasticidad de sustitución es constante a lo largo de la curva isocuanta y que, el cambio tecnológico, si lo ha habido, ha sido neutral, de tal manera, que el grado de homogeneidad, los parámetros distribucionales, y la elasticidad de sustitución no han variado sobre el tiempo), afectándose solamente γ (el parámetro de eficiencia). No se puede saber el efecto neto del primer supuesto sobre las estimaciones, pero si podemos adelantar que $\hat{\gamma}$ carece de significación, ya que sería una especie de promedio de las γ que ha tenido la función a través del tiempo, y no una estimación de γ actual. (Lo anterior sólo es posible si se trata de un análisis "cross-section", que no está a nuestro alcance poder realizar).

1. Estimación de la función de producción CES.

Teniendo en mente el objetivo de hacer mínimo el número de supuestos, se ha partido de que, en principio, debemos estimar una función CES para la industria bajo estudio. (La razón es que la función CES no asume a priori el grado de homogeneidad, el valor del parámetro distribucional, y la elasticidad de sustitución).

La función aludida es

$$Q_i = \gamma \left[c\, K_i^{-\alpha} - (1-c)\, L_i^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha} + u_i \qquad (35)$$

donde de nuevo, Q, representa el producto; K y L, el insumo de capital y trabajo (sólo supondremos estos dos factores), respectivamente; γ, c, v, y α, los parámetros de eficiencia, distribución, homogeneidad, y sustitución, en su orden; μ, es el error; y donde el subscrito i se refiere al año (u observación) i (= 1, ..., 25).

Aunque se tienen las observaciones de Q,K, y L, no es posible estimar directamente de (35) los diferentes parámetros contenidos en ella, ya que se trata de una función no-lineal, y los métodos tradicionales de estimación por mínimos cuadrados no son aplicables. Sin embargo, gracias a Jan Kmenta ⟨14⟩ , tenemos a nuestra disposición un modelo que nos permite aplicar estos sencillos métodos. El profesor Kmenta expandió (35) por series de Taylor alrededor de $\alpha = 0$, la cual, después desechar los términos de tercer y mayor orden, conduce a

$$\ln Q_i = \ln \gamma + v c \ln K_i + v(1-c) \ln L_i - \frac{1}{2} \alpha v c (1-c) \left[\ln K_i - \ln L_i\right]^2 + u_i \qquad (107)$$

que si es lineal.

La aproximación que se hace a la función CES puede ser separada en dos partes, una de ellas que corresponde a la forma Cobb-Douglas, y una que representa un "ajuste" debido a la desviación de α de cero, y que está dada por el término $-(1/2)\, v \alpha c (1-c) \left[\ln K_i - \ln L_i\right]^2$. Es claro que el ajuste o corrección se hace cero en el caso en que $\alpha = 0$, o lo que es lo mismo, cuando el coeficiente de regresión no difiera significativamente de cero, en cuyo caso nos encontramos con una función Cobb-Douglas.

Así pues, hemos aplicado regresión por mínimos cuadrados a (107) y los resultados son los siguientes (se usó un programa de Análisis de Regresión Múltiple -AMUR- del I.T.E.S.M., y ahí mismo fue corrido en una calculadora electrónica IBM 16 - 20):

Regresión Ordinaria:

VAR.	COEF.	E. St.	t
1. ln L	.6074	.0425	14.28
2. ln K	.5613	.0348	16.09
3 $[\ln K - \ln L]^2$	-.0656	.0410	-1.52

COEFICIENTES DE CORRELACION PARCIAL

(4 es la variable dependiente)

1.0000	-.6883	.3792	.8597
.6883	1.0000	.8744	.9590
.3792	.8744	1.0000	.7461
.8597	.9590	.7461	1.0000

Error Estandar de ln Q = .0302
Término Constante = -.34065
Coeficiente de correlación múltiple (r_m) = .9959
Coeficiente de regresión múltiple ajustado ($\bar{R}^2$) = .9950
Error estandar de r_m (σ_{r_m}) = .00082

Análisis de variancia:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F
Por regresión	4.6553	3	1.5518	1696.975
Residuo	.0192	21	.0009	
TOTAL	4.6745	24		

Pruebas de Hipótesis para coeficientes de regresión (B):

1a. Variable.-

$H_o : B_1 = 0 \; ; \; H_1 : B \neq 0$

$t_{(1)} = 14.28 > t_{.995} = 2.83$ (21 G.L.)

$\therefore$ Se rechaza H_o y se acepta H_1, o lo que es lo mismo $B \neq 0$

2a. Variable.-

$H_o : B_2 = 0 \; ; \; H_1 : B_2 \neq 0$

$t(2) = 16.09 > t_{.995} = 2.83$ (21 G.L.)

$\therefore$ Se rechaza Ho y se acepta H1

3a. Variable.-

$H_o : B_3 - 0 \; ; \; H_1 : B_3 \neq 0$

$t(3) = 1.523 < t_{.995} = 2.83$ (21 G.L.)

$\therefore$ Se acepta hipótesis nula a un nivel de significación de .005 ($B_3 = 0$).

$t_{(3)} = 1.523 < t_{.95} = 1.79$ (21 G.L.)

$\therefore$ Se acepta hipótesis nula a un nivel de significación de 0.05. ($B_3 = 0$)

$t_{(3)} = 1.523 < t_{.95} = 1.79$ (21 G.L.)

Se acepta hipótesis nula a un nivel de significación de .05. ($B_3 = 0$)

$t_{(3)} = 1.523 > t_{.90} = 1.32$ (21 G.L.)

$\therefore$ Se rechaza hipótesis nula y se acepta hipótesis alternativa a un nivel de significación de .10.

Prueba de la "F"

$F = 1696.975$

F^{3}_{21} (.01) $= 4.87$; $P\left[F > 4.87\right] = .01$

$F > F^{3}_{21}$ (.01)

$\therefore$ La regresión no es accidental o casual.

De los resultados anteriores podemos concluir que α no difiere significativamente de cero, por lo cual nuestro caso se reduce al de la función Cobb-Douglas. Los coeficientes de correlación parcial de $r_{1,4}$ y $r_{2,4}$ son bastante altos, explicando 1 y 2 en gran parte las variaciones de 4, mientras que $r_{3,4}$ nos indica que 3 no aporta algo significativo para la explicación de los cambios en 4.

El hecho de que el 3er. coeficiente de regresión no difiera significativamente de cero, no quiere decir que el ajuste sea malo. Prueba de ello es el elevadísimo Coeficiente de Regresión Múltiple (.99) y la también bastante grande F (1,696).

En virtud de lo anterior, obtenemos las siguientes estimaciones de los parámetros de la función CES de producción de la industria cervecera mexicana:

$v = 1.169$
$c = 0.525$
$\alpha = 0$
$\gamma = 1.42$
$\sigma = 1$

que podemos decir que, en su forma CES, nos es dada por

$$Q = 1.42 \left[.525\ K^{-o} + .475\ L^{-o} \right]^{-1.069/o}$$

que es indeterminada, pero que por el proceso de encontrar límites por medio de la regla de L'Hospital, nos queda

$$Q = 1.42\ K^{.5613}\ L^{.6074} \qquad (108)$$

Sin embargo, ya que los resultados no presentan pruebas concluyentes en contra de la existencia de la función de producción Cobb-Douglas, entonces es muy probable que nuestros resultados mejoren si estimamos directamente una función de este tipo. No significa esto, que estemos abandonando nuestro propósito original de no suponer un grado dado de elasticidad de sustitución, a priori, ya que hemos demostrado que esta no difiere significativamente de uno. Lo que pensamos es que, con la presencia de esta restricción, una vez que sabemos es válido imponerla, los estimados pueden mejorar en calidad.

2. Estimación de la función de producción Cobb-Douglas.

Estimaremos ahora una función de producción Cobb-Douglas Irrestricta para la industria cervecera mexicana. Usaremos la notación dada en (25):

$$Q_i = \gamma\, K_i^{-v/c}\, L_i^{v/c + v} + u\,i$$

Como se observará, esta función tampoco es lineal, así que sus parámetros no pueden ser calculados directamente por los métodos tradicionales de mínimos cuadrados. Sin embargo, puede fácilmente obtenerse una expresión lineal de ella si le aplicamos logaritmos.

$$\ln Q_i = \ln \gamma - v/c \ \ln\ K_i - (v/c + v)\ \ln L_i - u\,i \qquad (109)$$

Así pues, tenemos una expresión lineal (para fines de estimación) de la función de producción Cobb-Douglas, en la cual Q es el producto; K y L, el insumo de capital y el de trabajo, respectivamente; γ, v, y c, los parámetros de eficiencia, homogeneidad, y distribución, en su orden; y u_i el error, donde el subscrito i representa el año (i = 1,2, ..., 25).

De la aplicación de regresión por mínimos cuadrados a (109), obtenemos los siguientes resultados:

Regresión ordinaria:

Variable	Coef.	E. St.	t
1. ln L	.6484	.03393	19.11
2. ln K	.5127	.01459	35.15

Coeficientes de correlación parcial (3 es la variable dependiente):

1.0000	.6883	.8597
.6883	1.0000	.9590
.8597	.9590	1.0000

Error estandar de ln Q = .03113

Término constante = -.32403

Coeficiente de correlación múltiple (r_m) = .99772

Coeficiente de regresión múltiple ajustado ($\bar{R}^2$) = .9955

Error estandar de r_m (σr_m) = .00091

Análisis de variancia:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F
Por regresión	4.6532	2	2,3266	2400.27
Residuo	.0213	22	.0010	
Total.-	4.6745	24		

Pruebas de hipótesis para coeficientes de regresión (B):

la. Variable.-

$H_0 : B_1 = 0$; $H_1 : B_1 \neq 0$

$t_{(1)}$ $19.11 > t_{.995} = 2.82$ (22 G.L.)

$\therefore$ Se rechaza H_0 y se acepta H_1, o lo que es lo mismo $B_1 \neq 0$.

2a. Variable.-

$H_0 : B_2 = O$; $H_1 : B_2 \neq O$

$t(2) = 35.15 > t_{.995} = 2.82$ (22 G.L.)

$\therefore$ Se rechaza H_0 y se acepta H_1 , en otras palabras, $B_2 \neq O$.

<u>Prueba de la "F"</u>

$F = 2400.27$

$F^2_{22}\ (.01) = 5.72$; $P\ [F > 5.72] = .01$

$F = F^2_{22}\ (.01)$

$\therefore$ La regresión no es un mero accidente o casual.

Se puede observar fácilmente que la calidad de las estimaciones ha aumentado un poco. Esto se . infiere de las más altas tes'y la considerablemente más alta F. Sin embargo, esta nueva estimación no contribuye adicionalmente gran cosa en la explicación de las variaciones de la variable dependiente, debido sobre todo a que las estimaciones de la CES eran muy buenas, también, y entonces la nueva $\bar{R}^2$ no aumenta mucho.

Lo que en realidad nos debe importar es precisamente que parte de las variaciones es explicada por la regresión, y en este último caso, el 99.55% de las mismas lo es, y entonces podemos decir que los resultados son magníficos.

Los valores de los parámetros, a partir de las estimaciones, son

$v = 1.1611$

$c = -2.264$

$\gamma = 1.385$

y que resultan de la función de producción estimada, que queda como

$$Q = 1.385 \ K^{.5127} \ L^{.6484} \qquad (3.10)$$

Así como en el caso anterior pensamos que ya que σ no difiere significativamente de cero, entonces los estimados de una función Cobb Douglas serían mejores, también pensamos que si v no difiere significativamente de uno, entonces los estimados de una función Cobb-Douglas Restricta deben ser mejores que aquellos que se obtienen de una función Cobb-Douglas Irrestricta.

Lo que entonces tenemos que ver es si efectivamente v difiere significativamente de uno o no. Para ello tenemos que ver si la $\underline{z}$ dada por

$$t = \frac{\hat{B}_1 + \hat{B}_2 - 1}{\sqrt{\sigma^2_{\hat{B}_1} + \sigma^2_{\hat{B}_2} + 2 \operatorname{cov} (\hat{B}_1 \hat{B}_2)}}$$

es mayor que 2 (un nivel de confianza del 95.45%)

Efectuando

$$t = \frac{.65 - .51 - 1}{.0002128 - .001149 - 2(.00034)}$$

$$t = 3.54 > 2$$

y por lo tanto no hay evidencia en contra de la existencia de rendimientos crecientes a escala, y entonces nuestro proceso de estimación de la función de producción para la industria cervecera mexicana aquí se detiene, y nuestros mejores estimados de la misma, son los dados en (110).

B. Implicaciones de los resultados obtenidos.

Es en estos momentos cuando podemos derivar conclusiones objetivas al hacer análisis que tengan que ver con la función de producción.

1. Condiciones de optimización en la producción.

Estas requieren que

(a) $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_L}{Q_L}$

(b) $\frac{Q_k}{P_k} = \frac{Q_L}{P_L}$

(c) $P_k = Q_k \quad P_q$
$P_L = Q_L \quad P_q$

y son satisfechas entonces cuando

$$\frac{P_k}{.5727 \frac{Q}{K}} = \frac{P_L}{.6484 \frac{Q}{L}}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{K \; P_k}{.5127} = \frac{L \; P_L}{.6484} \qquad (111)$$

y cuando se igualan también P_k y P_L, respectivamente, a

$$P_k = .5127 \; \frac{Q}{K} \; P_q$$
$$P_L = .6484 \; \frac{Q}{L} \; P_q$$

o lo que es lo mismo, a

$$P_k = .5127\ I / K \qquad (112)$$

$$P_L = .6484\ I / L\ , \qquad (113)$$

donde I es el ingreso total que se recibe de vender el producto. (Hay que recordar que en todo el análisis se parte del supuesto de competencia perfecta en ambos mercados, de producto y de factores).

Las anteriores condiciones se reducen a decir que el empresario (en este caso la industria) deberá contratar capital y trabajo hasta el punto en que se logren las igualdades (112) y (113), que resultaran en aquellas cantidades justas para lograr la maximización de utilidades.

2. La elasticidad de producción del capital y del trabajo (E_k y E_L).-

Como se recordará, las elasticidad de producción de un factor se define como la razón del cambio porcentual del producto al cambio porcentual en el insumo en cuestión, de tal manera que entonces podemos estimar la elasticidad de producción a partir de la función obtenida.

Se recordará que en el caso de la función Cobb-Douglas, la elasticidad de producción de un factor es igual al exponente al que se encuentra elevado el mismo, lo cual hace bastante simple el problema.

Tenemos entonces que

$$E_k = .5127 \qquad (114)$$

y

$$E_L = .6484\ , \qquad (115)$$

que quiere decir que, cuando aumentamos el capital en 10% el producto se aumentará en 5.127%, y cuando aumentamos el trabajo en un 10% el producto se aumentará en 6.484%.

Lo anterior se puede usar para mostrar que existen rendimientos crecientes a escala, ya que si suponemos que tanto K como L se aumentan en un 100%, el resultado será que el producto se multiplica por $2^{1.1611}$

$Q = f(K, L)$ homogénea de grado 1.1611

implica

$$f(2K, 2L) = 2^{1.1611} f(K, L)$$

por definición, ya que

$$f(\lambda K, \lambda L) = 1.385 (\lambda K)^{.5127} (\lambda L)^{.6484}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda K, \lambda L) &= 1.385 \lambda^{.5127} K^{.5127} \lambda^{.6484} L^{.6484} \\ &= 1.385 \lambda^{.5127 + .6484} K^{.5127} L^{.6484} \\ &= \lambda^{1.1611} 1.385 K^{.5127} L^{.6484} \\ &= \lambda^{1.1611} f(K, L) \end{aligned}$$

3.- La relación K/L óptima.-

De las condiciones de optimización en la producción, tenemos

$$P_k = .5127\ I/K$$

$$P_L = .6484\ I/L$$

y si dividimos una ecuación entre otra, nos queda

$$\frac{P_k}{P_L} = \frac{.5127\ \ I/K}{.6484\ \ I/L}$$

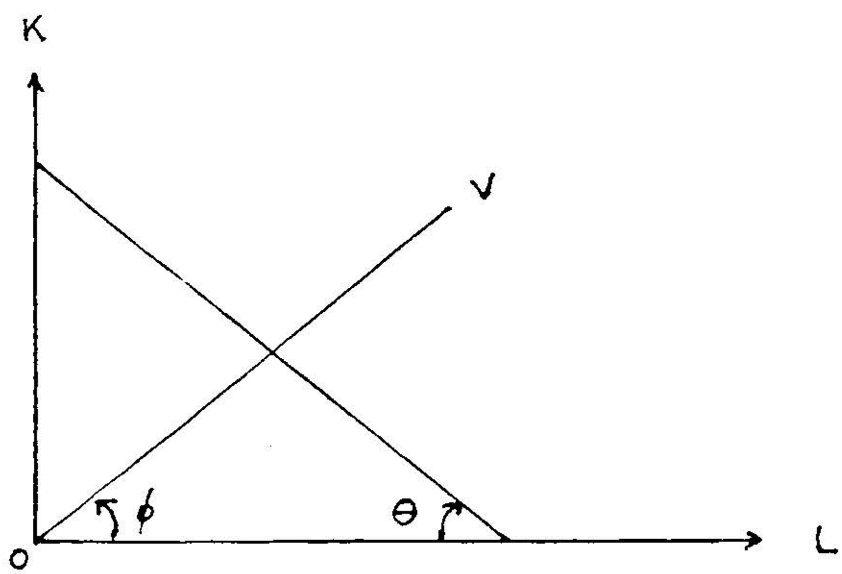
simplificando

$$\frac{P_k}{P_L} = .791\ \frac{L}{K}$$

y rearreglando, tenemos por fin

$$\frac{K}{L} = .791\ \frac{P_L}{P_k} \tag{116}$$

que representa un vector recto, cuando los precios no cambian, que parte del origen. Se visualiza gráficamente de la siguiente manera:



En la gráfica 3.1 0V representa el vector aludido, cuya pendiente es igual a K/L

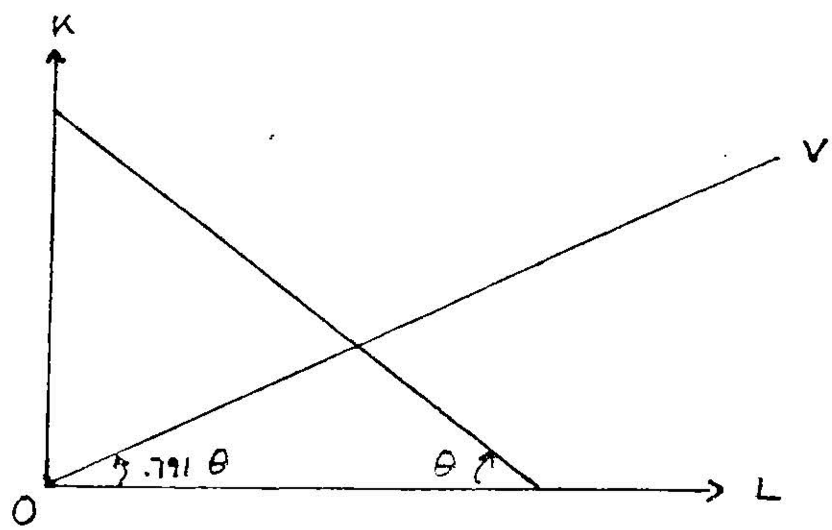
$$\tan \varnothing = \frac{K}{L}$$

la cual a su vez es igual a la pendiente de θ (= P_L/P_k) multiplicada por .791 :

$$\tan \theta = \frac{P_L}{P_k}$$

$$\tan \varnothing = .791 \tan \theta$$

y entonces podemos dibujar más simplemente la gráfica 3.1



Por otra parte, del resultado en (116) podemos ingerir la participación relativa de los factores en el producto; tenemos

$$\frac{K}{L} = .791 \frac{P_L}{P_k}$$

multiplicando ambos lados por P_k/P_L nos queda

$$\frac{K.P_k}{L.P_L} = .791 \tag{117}$$

que nos dice que el pago que recibe el capital es el 79.1% del pago que recibe el trabajo.

4.- La función de costos de la industria cervecera.-

De acuerdo con las derivaciones el capítulo II, la función de costos que corresponde a una función Cobb-Douglas Irrestricta está dada por

$$C = \gamma^{-1/v} \left(\frac{-1}{c\ P_k}\right)^{v/c} \left(\frac{1+c}{c\ P_L}\right)^{-v/c\ -v} q^{1/v}$$

En nuestro caso especial, al sustiruir valores, esta función resulta en

$$C = .759 \left(\frac{P_k}{.441}\right)^{.513} \left(\frac{P_L}{.513}\right)^{1.6741} q^{.861} \qquad (118)$$

la función de costos de la industria cervecera mexicana.

5.- Una aplicación de la función de producción.-

En este trabajo nos hemos mantenido, hasta el momento, en un grado de abastracción útil y necesario para nuestros propósitos. Se han derivado funciones de producción, se ha hablado de características técnicas y condiciones de producción, y se ha estimado una función de producción, y todo esto lo ha hecho posible el tratar el tema en la forma "abstracta" en que ha sido tratado.

Este proceso de investigación debe tener aglún significado, esto es, lo que se ha hecho debe poder servir para el diseño de alguna política económica al nivel correspondiente (Industria).

Es el propósito de este inciso el mostrar una aplicación de la función de producción, la importancia de cuyo conocimiento de hecho se hace notable en la investigación de la igualación de los precios de los factores en la teoría del comercio internacional, en la investigación de las estrategias del desarrollo económico (donde se necesita saber si se puede aplicar el modelo de Harrod-Domar o no, por ejemplo), y en otros campos.

En este caso propondremos una metodología para averiguar los requerimientos futuros de capital y los de trabajo, basados en los resultados que hemos obtenido, y haremos algunas consideraciones en lo que a integración de la industria se refiere, basados en que existen rendimientos crecientes a escala en la producción.

a) Proyección de las necesidades de capital y de trabajo, para el año n (K_n y L_n, respectivamente), de la industria cervecera mexicana.- Como se recordará, la demanda de los insumos es una demanda derivada de la demanda del producto. En tal virtud el nivel de demanda de ellos varía directamente con ésta.

Lo anterior hace necesario averiguar la demanda del producto en el año n (Q_n^d), para poder insertarla en la función de producción, eliminando así una variable, que entonces sería un parámetro. Por otra parte, existe sustituibilidad entre los factores, por lo cual es necesario conocer también la razón de precios relativos de los mismos en ese año n. Ya que no nos son asequibles estos datos, tenemos que dejar únicamente indicado el camino a seguir, y lo que aquí hagamos será elaborar una metodología conducente a él.

a.1 La demanda de cerveza.- Muchos deben ser los factores que afecten la demanda de cerveza, pero algunos solamente serán determinantes principales de la misma.

Podemos dividir en dos grupos los factores mencionados: aquellos que se encuentran fuera del control de la industria y aquellos que son controlables por ella. En el primer grupo hallamos factores tales como el Ingreso Medio de la población (Y/NP), el precio de los bienes sustitutos P_s (refrescos y vino), el tamaño de la población (N) y la composición de la misma (el grupo consumidor es aquel cuya edad está comprendida entre los 16 y 64 años de vida), el nivel educativo de la población (E), y T, los factores estacionales, de tendencia y cíclicos.

En el segundo grupo hallamos un factor que puede jugar un importante papel en la demanda de cerveza, y este es el factor empresarial (D), ya que una "fuerte" dirección de las empresas puede hacer que la demanda para la industria aumente, y no sólo que se reparta de diferente manera el mercado ya existente de por sí entre las diferentes empresas.

Encontramos que entonces, la demanda de cerveza en el año n es una función.

$$Q_n^d = f\,(Y/PN,\ P_S\ ,\ N, E, D, T)_n$$

Una vez arrivada esta función, será posible estimar las de factores en el año n.

a.2 La función de producción y las necesidades de factores.- De acuerdo con los resultados obtenidos y las condiciones derivadas en el segundo capítulo, sabemos que los factores deberán combinarse en una forma tal que

$$-\frac{dK}{dL} = \left(\frac{P_L}{P_k}\right)_n$$

y que el nivel de producto estará dado por la relación funcional

$$Q_n^d = 1.385\ K^{.5127}\ L^{.6484} \qquad (110)$$

Las dos ecuaciones mencionadas nos proveen de un juego que puede ser resuelto por simultáneas determinado, así los valores futuros de K y de L consecuentes con el objetivo de maximización de utilidades.*

---

* De nuevo se encuentra presente en nuestro análisis el restrictivo supuesto de mercados perfectamente competitivos.

Así pues, tenemos,

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{Q_L}{Q_k} = \frac{.6484\ Q/L}{.5127\ Q/K} = \frac{.6484}{.5127}\ \frac{K}{L}$$

e igualando a $(P_L/P_k)_n$, nos queda

$$\frac{K}{L}\left(\frac{.6484}{.5127}\right) = \left(\frac{P_L}{P_k}\right)_n$$

$$K/L = .791\ (P_L/P_k)_n \tag{116}$$

la cual, junto con (110) nos provee el juego de ecuaciones a resolver por simultáneas:

$$\begin{cases} K = .791\ L\ (P_L/P_k)_n & (116) \\ Q_n^d = 1.385\ K^{.5127}\ L^{.6484} & (110) \end{cases}$$

Despejando K y L en (116) y (110)

$$K = .791\ L\ (P_L/P_k)_n$$

$$L = (K/.791)\ (P_k/P_L)_n$$

y

$$K = \left(\frac{Q_n^d}{1.385\ L^{.6484}}\right)^{1/.5127}$$

$$L = \left(\frac{Q_n^d}{1.385\ K^{.5127}}\right)^{1/.6484}$$

e igualando, obtenemos finalmente

$$K_n = .001 \; Q_n^{.861} \left(\frac{P_k}{P_L}\right)_n^{.558}$$

$$L_n = .00126 \; Q^{.861} \left(\frac{P_k}{P_L}\right)_n^{1.558}$$

que representan las estimaciones implícitas de las necesidades de capital y trabajo para el año n.

Este análisis es simplificado en extemo, pero puede servir como una guía que marque el camino que se deba seguir en una investigación - que busque determinar los requisitos futuros de insumos de una industria, y al mostrar esto, mostramos una importante aplicación de las funciones de producción que justifica el análisis y estimación de las mismas.

b) Integración en la industria cervecera mexicana.- Como parte de las estimaciones tenemos que la función de producción de la industria cervecera es homogénea de grado v = 1.1611, esto es, que existen rendimientos crecientes a escala. ¿Qué nos sugiere esto? ¿Qué implicaciones tiene en cuanto a agrupación de recursos de las fábricas?

Este hecho tiene implicaciones fuertes en lo que a integración se refiere. La razón reside en el hecho de que si se unen fábricas se aprovechan los rendimientos crecientes a escala, aumentando el aprovechamiento de los recursos que se tienen disponibles para la producción.

Podemos probar la afirmación anterior de la siguiente manera: Supongamos que tenemos una función de producción homogénea de grado dos

$$Q = K\,L$$

y que los precios de los insumos sean

P_k = \$100 y P_L = \$50, y que Q a producir por la industria sea 1000. Supongamos primero la existencia de dos fábricas que producirán 500 cada una, y así

$$\frac{P_L}{P_k} = \frac{Q_L}{Q_k}$$

$$\frac{P_L}{P_k} = \frac{Q\,/\,L}{Q/\,K} = \frac{K}{L}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{\$50}{\$100} = \frac{1}{2}$$

$$K = \frac{1}{2}\ L$$

e insertándolo en la función de producción

$$500 = K\,L$$

$$500 = \tfrac{1}{2}\ L\,L = \tfrac{1}{2}\ L^2$$

$$L = \sqrt{1000} = 31.62$$

$$K = \frac{31.62}{2} = 15.81$$

$$P_k\ .\ K = \$\ 1581$$

$$P_L\ .\ L = \$\ 1581$$

$$\text{Costo X Fáb.} = \$\ 3162$$

Tenemos así el costo por fábrica; y el costo para la industria será

$2 \times \$3162 = \$6,324$

Ahora contrastémoslo con la situación en la cual sólo existe una fábrica que produce los 1000,

$$1000 = \tfrac{1}{2}\, L^2$$

$$L = \sqrt{2000} = 44.7$$

$$K = \tfrac{1}{2}\,(44.7) = 22.35$$

$P_k . K =$	\$ 2235
+ $P_L . L =$	\$ 2235
Costo X Fáb.	\$ 4470

y tenemos así el costo por fábrica que es el mismo que el costo para la industria, y que claramente es menor que el del caso anterior. Esto nos ha servido pues, para probar que la integración redunda en un uso más eficiente de los recursos.

Es conveniente recalcar que aquí se habla de una integración física de los recursos de la industria, no de una unión colusiva estatutoria de las empresas.

A pesar de que la integración tiene ventajas al producir economías en la producción, éstas no son muy grandes, ya que el grado de homogeneidad es 1.16, y se acerca al caso de rendimientos constantes, en donde no hay economías en la producción al suceder la integración.

Por otra parte, si bien si se provocarían economías en la produc -

ción, es bastante probable que se provocaran deseconomías en la distribución que más que las compensaran, produciendo una pérdida neta la integración referida.

Una vez más, hemos probado la aplicación de las funciones de producción en problemas trascendentales de orden económico, y reforzamos la justificación del estudio y estimación de las mismas.

APENDICE AL CAPITULO III

EXPANSION POR SERIES DE TAYLOR (ALREDEDOR DE $\alpha = 0$) DE LA FUNCION CES DE PRODUCCION, DESECHANDO LOS TERMINOS DE TERCER Y MAS ALTO ORDEN.

La forma de la función de producción CES, es

$$Q = \gamma \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]^{-v/\alpha} \qquad (35)$$

y al aplicarle logaritmos Neperianos, se transforma en

$$\ln Q = \ln \gamma - \frac{v}{\alpha} \ln \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right] \qquad (119)$$

Nos interesa expandir la función anterior por series de Taylor, cuya fórmula para la expansión de una función $f(x)$, alrededor de cero, es ⟨7⟩:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \cdots + \frac{1}{n!} x^n f^n(0)$$

En nuestro caso nos interesa expandir la función $f(\alpha)$ alrededor de cero, pero sólo hasta el término de segundo orden, por lo cual debemos encontrar

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha f'(0) + \frac{1}{2!} \alpha^2 f''(0) \qquad (120)$$

Así pues, por tratarse de una derivación laboriosa, encontremos primero $f(0)$:

$$f(\alpha) = \ln \gamma - v \frac{\ln \left[cK^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]}{\alpha}$$

Al darle el valor cero a α , el segundo término permanece indeter minado, por lo cual hay que usar la regla de L'Hospital para poder encontrar f(0),

$$f(0) = \ln \gamma - v \frac{\frac{d}{d\alpha} \ln \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]}{\frac{d}{d\alpha} (\alpha)}$$

$$f(0) = \ln \gamma + vc \ln K + v(1-c) \ln L \quad , \qquad (121)$$

y tenemos así los tres primeros términos de la función expandida.

Nos falta aún encontrar

$$\alpha f'(0) + \frac{1}{2} \alpha^2 f''(0) \quad ,$$

por lo cual se procede a derivar f(α) :

$$f' = \frac{v}{\alpha} \frac{\left[c K^{-\alpha} \ln K + (1-c) L^{-\alpha} \ln L \right]}{\left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]} + \frac{v}{\alpha^2} \ln \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]$$

y multiplicando toda la ecuación por α para completar el segundo término de (120)

$$\alpha f' = v \frac{\left[c K^{-\alpha} \ln K + (1-c) L^{-\alpha} \ln L \right]}{\left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]} + \frac{v}{\alpha} \ln \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right] \qquad (122)$$

(En este caso, el α que multiplica a f' se"presta"en ambos términos a la expansión alrededor de $\alpha = 0$.)

Derivamos ahora f'' , y obtenemos, después de simplificar,

$$f'' = \frac{-v}{\alpha} \times \frac{\left[c K^{-\alpha} \ln^2 K + (1-c) L^{-\alpha} \ln^2 L \right]}{\left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]} + \frac{v \left[c K^{-\alpha} \ln K + (1-c) L^{-\alpha} \ln L \right]^2}{\alpha \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]^2}$$

$$- \frac{2v \left[c K^{-\alpha} \ln K + (1-c) L^{-\alpha} \ln L \right]}{\alpha^2 \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]} - \frac{2v}{\alpha^3} \ln \left[c K^{-\alpha} + (1-c) L^{-\alpha} \right]$$

Ahora hay que multiplicar toda la ecuación por $(1/2)\alpha^2$, para después sumar el resultado a (122),

$$\frac{1}{2}\alpha^2 f'' = -\frac{a v [cK^{-\alpha}\ln^2 K + (1-c)L^{-\alpha}\ln^2 L]}{2[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]} + \frac{a v}{2}\frac{[cK^{-\alpha}\ln K + (1-c)L^{-\alpha}\ln L]^2}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]^2}$$

$$-\frac{v[cK^{-\alpha}\ln K + (1-c)L^{-\alpha}\ln L]}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]} - \frac{v}{\alpha}\ln[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}] \quad (\quad)$$

En esta última ecuación, las 'as' representan 'alfas' que no se encuentran comprometidas en la expansión alrededor de cero.

Sumemos ahora (121) y (122) para después completar la expansión inmediatamente :

$$\alpha f' + \frac{1}{2}\alpha^2 f'' = v\frac{[cK^{-\alpha}\ln K + (1-c)L^{-\alpha}\ln L]}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]} + \frac{v}{\alpha}\ln[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]$$

$$-\frac{a v[cK^{-\alpha}\ln^2 K + (1-c)L^{-\alpha}\ln^2 L]}{2[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]} + \frac{a v[cK^{-\alpha}\ln K + (1-c)L^{-\alpha}\ln L]^2}{2[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]^2}$$

$$-\frac{v[cK^{-\alpha}\ln K + (1-c)L^{-\alpha}\ln L]}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]} - \frac{v}{\alpha}\ln[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]$$

$$= \frac{a v}{2}\left\{\frac{[cK^{-\alpha}\ln K + (1-c)L^{-\alpha}\ln L]^2}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]^2}\right.$$

$$\left. - \frac{[cK^{-\alpha}\ln^2 K + (1-c)L^{-\alpha}\ln^2 L]}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]}\right\}$$

$$\alpha f' + \frac{1}{2}\alpha^2 f'' = \frac{av}{2}\left\{ \frac{2c(1-c)K^{-\alpha}L^{-\alpha}\ln K \ln L - c(1-c)K^{-\alpha}L^{-\alpha}\ln^2 L}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]^2} \right.$$

$$\left. - \frac{c(1-c)K^{-\alpha}L^{-\alpha}\ln^2 K}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]^2} \right\}$$

$$= \frac{avc(1-c)}{2}\left\{ \frac{-K^{-\alpha}L^{-\alpha}[\ln^2 K - 2\ln K \ln L + \ln^2 L]}{[cK^{-\alpha} + (1-c)L^{-\alpha}]^2} \right\}$$

$$\alpha f'(0) + \frac{1}{2}\alpha^2 f''(0) = \frac{-avc(1-c)}{2}\,[\ln K - \ln L]^2$$

y volviendo la <u>a</u> a <u>α</u> (que no estaba comprometida en tomar el valor cero),

$$\alpha f'(0) + \frac{1}{2}\alpha^2 f''(0) = -\frac{1}{2}\alpha v c(1-c)[\ln K - \ln L]^2 ,$$

y hemos encontrado así, el término que nos faltaba para completar la expansión.

Así pues, (120) resulta finalmente en

$$\ln Q = \ln \gamma + vc \ln K + v(1-c)\ln L - \frac{1}{2}\alpha v c(1-c)[\ln K - \ln L]^2 \qquad (107)$$

una función lineal, que puede estimarse mediante métodos tradicionales de mínimos cuadrados.

CONCLUSIONES

La técnica de la estimación de las funciones de producción ha avanzado considerablemente, aunque aún falte mucho camino por recorrer. Esta técnica nos ha provisto de la herramienta necesaria para estimar la función de producción de la industria cervecera mexicana, y al menos aparentemente, los resultados han sido buenos.

A diferencia de estudios anteriores, se ha utilizado una forma irrestricta de la función CES en las estimaciones, esto es, no hemos asumido a priori la existencia de rendimientos constantes. Con ello hemos ganado algo en generalidad, pero para ello hemos requerido datos de capital que no siempre pueden estar a la mano o ser estimados (como le hemos hecho nosotros). En los cálculos de otros estudios no es necesario conocer K. Sin embargo, es porque se está partiendo del supuesto de homogeneidad de grado uno que no se necesita tener o estimar K. Si se tiene el dato de capital, parece entonces ser preferible utilizar la forma Irrestricta en las estimaciones, ya que no hay necesidad de correr el peligro de "falta de especificación".

Sobre si los resultados son típicos o no, lo único que puede decirse es que, mientras no se proceda a hacer estudios posteriores sobre la materia, la existencia de rendimientos crecientes y elasticidad de sustitución igual a uno (u otro valor) no podrá ser comprobada y seguirá siendo un freno para el análisis y dictamen económico, la escasez de información acerca de las diferentes industrias. Es posible que los resultados que se obtengan de estimar las funciones de otras industrias difieran entre sí, así como también es posible que no difieran entre sí, y la única forma de averiguarlo es investigando más- la materia.

ANEXO

Originalmente no se disponía del dato acerca de K (el Capital), por lo que fue necesario calcularlo indirectamente.

De acuerdo con la teoría moderna del capital, el valor del activo de capital comprometido en la producción es igual a los ingresos netos del mismo entre su precio, que en mercados perfectos de capital es igual a la tasa de interés de mercado

Se tiene

$$K . P_k \; (= rK) = I - L . P_L$$

entonces

$$K = \frac{I - L . P_L}{r}$$

donde K, es capital; I, los Ingresos Totales; L y P_L, la cantidad de trabajadores y el Precio de los servicios del trabajo; y r, la tasa de interés. (Todo medido en términos reales, esto es, descontando los efectos de la inflación de precios).

De esta manera fue posible tener los datos acerca de Capital, que complementaron los datos que se tenían de Q (producto), I, L, y P_L, y con los cuales fue posible hacer las estimaciones.

A continuación presentaré una tabla en la cual se consignan las diferentes observaciones de insumos y producto de la industria cervecera mexicana, que se compone de más de 20 fábricas en la actualidad.

TABLA 1.- OBSERVACIONES ACERCA DE LOS INSUMOS CAPITAL Y TRABAJO Y DEL PRODUCTO (EN LN DE SUS INDICES)

AÑO	ln K	ln L	ln O
1943	2.3026	2.3026	2.3026
44	2.4971	2.3795	2.5305
45	2.5079	2.4580	2.5756
46	2.5416	2.5471	2.6846
47	2.4842	2.5151	2.5192
48	2.3997	2.5257	2.5621
49	2.4520	2.8729	2.7422
50	2.7997	2.8494	2.9487
51	2.7755	2.9669	3.0025
52	2.8591	3.0088	3.0937
53	2.8315	2.9991	3.0824
54	2.9913	3.0824	3.2303
55	3.0021	3.0746	3.2351
56	3.1446	3.1294	3.3364
57	3.2588	3.0928	3.3680
58	3.3279	3.0083	3.3385
59	3.5699	2.9698	3.4177
60	3.7002	2.9590	3.4923
61	3.7223	2.9312	3.4946
62	3.6986	2.9312	3.4898
63	3.7702	2.8775	3.5043
64	3.9484	2.9993	3.6498
65	4.0675	2.9719	3.6577
66	4.0000	3.2176	3.7546
67	4.1534	3.1476	3.8555

TABLA 2

	1	2	3	4	5	6
1943	365,201	259,266	32,026	4,439	56,330	134,139
44	436,096	325,694	34,524	4,797	82,200	163,072
45	438,240	340,843	38,103	5,187	93,945	164,801
46	461,887	380,000	45,338	5,670	114,968	170,362
47	523,157	322,305	45,878	5,492	116,550	160,771
1948	410,762	336,042	44,301	5,549	116,303	147,936
49	460,260	404,507	59,570	7,854	142,811	155,831
50	615,666	494,898	69,394	7,674	210,234	220,583
51	620,186	522,252	66,783	8,627	253,618	215,328
52	664,700	572,144	73,004	8,997	286,209	234,087
1953	680,098	565,708	79,743	8,912	280,967	227,661
54	752,691	655,877	85,105	9,684	352,259	267,154
55	720,614	658,942	81,581	9,609	399,485	270,080
56	848,024	729,222	95,609	10,148	483,984	311,442
57	852,349	752,538	94,164	9,785	549,594	349,057
1958	878,100	730,815	95,197	8,990	607,632	374,017
59	976,309	790,810	101,455	8,652	757,147	476,520
60	1,098,153	852,058	107,357	8,561	893,896	542,749
61	1,135,115	854,051	113,651	8,326	927,993	554,932
62	1,166,225	850,041	150,847	8,327	978,838	541,890
1963	1,207,426	862,382	150,745	7,890	1,041,462	582,163
64	1,363,546	997,443	172,857	9,335	1,285,496	695,721
65	1,510,876	1,005,265	178,904	8,671	1,449,416	783,524
66	1,473,093	1,107,745	219,130	11,085	1,460,733	732,487
67	1,771,593	1,225,392	246,234	10,342	1,717,348	853,924

Descripción de la tabla 2

1.- Valor del producto ajustado por índice de precios con base 1954-100. (Indice elaborado por el Banco de México, S.A. en México 1961 y México 1967)

2.- Producción en Millares de Litros.

3.- Total de salarios pagados ajustado por índice de precios con base 1954-100 (Banco de México, S.A.).

4.- Número de trabajadores empleados por la industria,

5.- Valor del pago a todos los insumos de la industria a precios corrientes.

6.- Valor del capital empleado en términos reales:

$$\text{Col. } 6 = \frac{\text{Valor Producto a P.C. - Pago Total a Insumos a P.C.}}{r}$$

donde r = tasa real de interés.

NOTA: Todos estos datos fueron obtenidos de la Asociación Nacional de Fabricantes de cerveza. (con sede en México, D.F.)

REFERENCIAS

1. R.D.G. Allen, Mathematical Analysis for Economists, St. Martin's Press, 1958.

2. K. Arrow, H. Chenery, B. Minhas, R. Solow, "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", Review of Economics and statistics (REStat), agosto de 1961.

3. Murray Brown, On the Theory and Measurement of Technological Change, Cambridge University Press (1966).

4. ________, "The Constant Elasticity of Substitution Production Function", Econometric Institute, Roterdam, Holanda (1965).

5. M. Brown y John S. de Cani, "Technological Change and the distribution of Income", International Economic Review, Sept. de 1963.

6. M. Brown y J. Popkin, "A measurement of technological Change and Returns to Scale", REStat, noviembre de 1962.

7. Alpha Chiang, "Fundamental Methods of Mathematical Economics", McGraw-Hill, 1967.

8. C.W. Cobb y P.H. Douglas, "A Theory of Production", American review, marzo de 1928.

9. Dhrymes y Kurz, "The Generation of Electric Energy", Econométrica, julio de 1964.

10. R.K. Diwan, "An Empirical Estimate of the CES Production Function", Reunión Europea de la Sociedad de Econometría en 1963. (Aparece un resumen en Econométrica, en octubre de 1964.)

11. W.M. Gorman, "Production Functions in which the Elasticities of substitution stand in fixed proportions of each other", Review of economic Studies, julio de 1965.

12. J.G.M. Hilhorst, "Measurement of Production Functions in Manufacturing Indus y", Statistical Studies of the Netherland Central Bureau of Statistics, No. 13 (1966).

13. M. Kamien, "A Comment on Alternative Derivations of the two Input Production Function with CES", Carnegie Institute of Technology, 1963.

14. J. Kmenta, "On the Estimation of the CES Production Function", Social Systems Research Institute, Winsconsin University, 1966.

15. R.I. McKinnon, "Factor Price Changes and Production Function Estimates", Stanford University (mimeo), julio de 1962.

16. R.I. McKinnon, "Wages, Capital Costs, and Employment in Manufacturing: a Model Applied to 1947-58 U.S. Data, Econometrica, julio de 1962.

17. B.S. Minhas, An International Comparison of Factor Costs and Factor Use, North Holland Publishing Co., Amesterdam, Holanda, 1964.

18. ________, "The Homohypallagic Production Function; factor intensity Revearsalsa and the Heckscher-Ohlin Theorem", Restet.

19. V. Mujerki, "Generalized SMAC Function with Constant Ratios of Elasticity of Substitution", REStat, octubre de 1963.

20. National Bureau of Economic Research, The Theory and Emprical analysis of Production, Columbia University Press, (Studies in Income and Wealth, Vol. 31).

21. Robert Solow, "A Contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economic, febrero de 1956.

22. ________, "Technical Change and the Aggregate Production Function", Review of Economics and Statistics, agosto de 1957.

23. Murray Spiegel, Statistics, Schaum Publishing Company, 1961.

24. Hirofumi Uzawa, "Production Functions with Constant Elasticities of Substitution", Review of Economic Studies, octubre de 1962.

25. Taro Yamane, Statistics Harper & Row Co., 1967.