UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ECONOMIA

ENSAYO DE APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES AL ANALISIS ECONOMICO (UN MODELO MATEMATICO DE CRECIMIENTO ECONOMICO).

T E S I S

Que Para Obtener el Título de

LICENCIADO EN ECONOMIA

P r e s e n t a

JAVIER TERROBA TORICES

México, D. F. 1978

T
1+D7 5
.5
T4

A mi madre

I N D I C E

En este trabajo se construye un modelo de crecimiento económico a partir de dos teorías: la teoría de la demanda y la teoría de las ecuaciones diferenciales. En realidad, más que la teoría de la demanda, es el concepto del equilibrio del consumidor el que se utiliza. La idea es hacer encajar las ecuaciones diferenciales en la teoría económica del consumidor y, a partir de ésta, dar un sentido económico a aquéllas. Es por eso que se escogen funciones lineales para construir el modelo, las cuales al ser igualadas (siguiendo el concepto de equilibrio del consumidor) dan el sistema en equilibrio. Este sistema es una ecuación diferencial cuya solución nos da la trayectoria del producto en el tiempo.

El primer capítulo aborda el problema de la demanda. Se hace una exposición de la teoría de la demanda empezando con el concepto de curva de indiferencia. -- Luego se analiza la línea de precios del consumidor; la cual, junto con la curva de indiferencia, nos lleva al concepto - de equilibrio del consumidor. Luego se - estudian los efectos renta, sustitución y precio para explicar, con ayuda de --- ellos, la forma de una curva de demanda. Se explica cómo la variación inversa entre el precio y la cantidad demandada de una mercancía, no es más que el resultado de la suma de dos fuerzas: un efecto renta y un efecto sustitución.

En el capítulo dos se estudian las ecuaciones diferenciales. Se inicia la - exposición con el concepto de ecuación - diferencial y los distintos tipos de --- ecuaciones diferenciales que se usan en el análisis científico. Luego se explica el caso de variables separables para pasar a continuación con las ecuaciones li neales de primero y segundo órdenes.

En los capítulos tres y cuatro se construye el modelo y se obtienen las conclusiones pertinentes. El modelo consta de cuatro versiones. La primera es de la forma

$$y(t) = \bar{y} + (y_0 - \bar{y})\, e^{\lambda t}$$

donde y es el producto y t el tiempo.- La segunda es de la forma

$$y(t) = c_1 e^{At} + c_2 e^{Bt} - J/K$$

donde

$$A = 1/2\left(-m/n + \sqrt{(m/n)^2 - 4k/n}\right)$$

$$B = 1/2\left(-m/n - \sqrt{(m/n)^2 - 4k/n}\right)$$

siendo k,m,n parámetros del modelo. La tercera y cuarta versiones son las siguientes:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{\lambda t} - J/K$$

donde

$$\lambda = -m/2n$$

y

$$y(t) = e^{\lambda t} (c_1 \cos A t + c_2 \operatorname{sen} Bt) - J/K$$

En general, la conclusión es que cada trayectoria del producto en el tiempo es resultado del tipo de ecuación utilizada.

I.- TEORIA DE LA DEMANDA.

La teoría de la demanda se propone explicar la forma que presenta una curva de demanda. En la siguiente figura se representa una curva de este tipo.

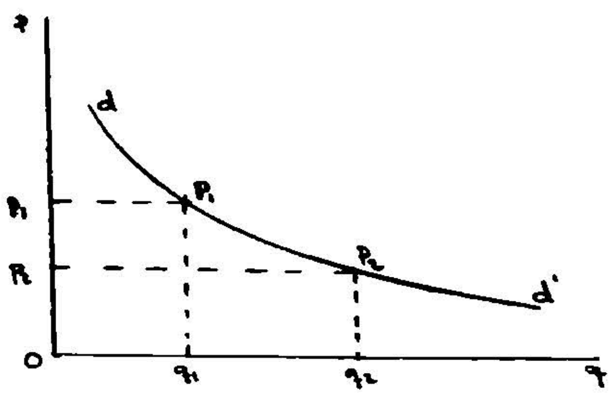

figura 1.-

En esta figura q representa la cantidad demandada de una mercancía, mientras que p representa el precio. En el punto P_1 $(q_1 p_1)$ el consumidor de manda oq_1 unidades de mercancía al precio p_1. Sin embargo, si el precio baja de p_1 a p_2 la cantidad demandada por el consumidor aumenta de oq_1 a oq_2. Esto ilustra la relación entre el precio de una mercancía y la cantidad demandada, la cual es inversa según se aprecia por la forma de la curva de demanda dd'.

Es ésto el punto esencial que aborda la teoría de la demanda. Los economistas la han elaborado con el fin de explicar la relación existente entre la cantidad que el consumidor demanda de una mercancía y el precio de ella. ¿Por qué al aumentar (disminuir) el precio de una mercancía ha de bajar (subir) su cantidad demandada? La respuesta la encontraremos al unir varios conceptos que a continuación se explican.

a) Curvas de indiferencia.- Considérese la siguiente figura.

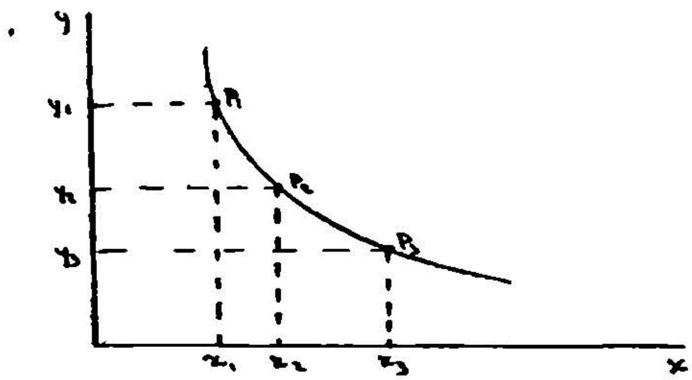

figura 2.-

En la figura 2 el eje horizontal representa distintas cantidades del bien x. En el eje vertical se representan distintas cantidades del bien y. En el punto P_1 el consumidor posee x_1 cantidades de x y y_1 de y. Si se desplaza a lo largo de la curva de P_1 a P_2 tendrá que renunciar a $y_1 - y_2$ de y para obtener en cambio $x_2 - x_1$ de x. Lo mismo sucederí si pasa de P_2 a P_3 ; - sólo que ahora cambia $y_2 - y_3$ de y para obtener $x_3 - x_2$ del bien x. En ningún punto, sin embargo, el consumidor se - encontrará en mejor situación que en - cualquiera de los demás. En nuestro caso al consumidor le da lo mismo situarse en P_1 , P_2 o P_3 . Es decir, el consumidor se encontrará tan satisfecho consumiendo la porción (x_1 , y_1) como cualquiera de las otras dos de la figura.-

La curva que representa esta situación es llamada "curva de indiferencia". --

Una curva de indiferencia es pues una representación de las distintas combinaciones de bienes de las que el consumidor puede disponer sin alterar o cambiar su nivel de satisfacción. En términos de utilidad esto significa que en la figura 2, la combinación (x_1, y_1) en el punto P_1 de la curva, produce la misma utilidad al consumidor que las combinaciones (x_2, y_2) de P_2 y (x_3, y_3) de P_3 en la curva de indiferencia.

Si el consumidor quisiera mejorar su situación elevando la utilidad tendría que desplazarse a otras curvas de indiferencia más elevadas. Esto se muestra en la figura 3.

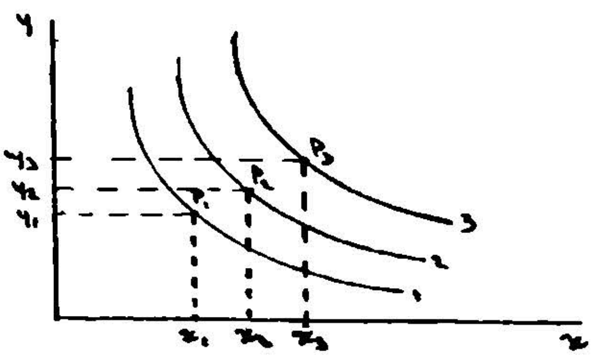

figura 3.-

Aquí el consumidor podrá elevar su utilidad pasando de la curva 1 a la 2, o aún más, si pasa a la curva 3. A este tipo de representación se le llama un "mapa de indiferencia" y nos será útil en consideraciones posteriores.

b) **La línea de precios.**- Una línea de precios representa las posibilidades económicas del consumidor. Nos muestra su capacidad de compra dados su nivel de ingresos y los precios de las mercancías en el mercado. Consideremos la siguiente figura.

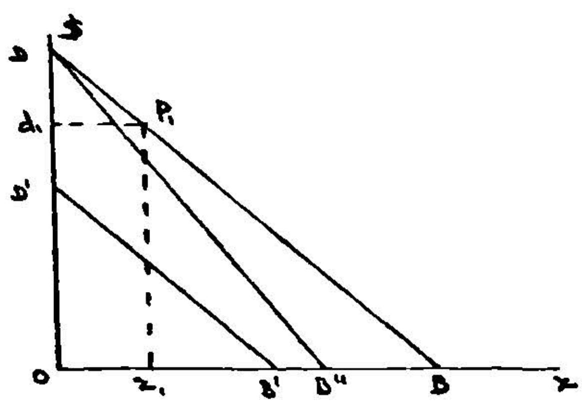

figura 4.-

La figura 4 nos muestra en el eje

horizontal la cantidad de la mercancía x que el consumidor puede adquirir con el dinero representado en el eje vertical. Por ejemplo en el punto P_1 el consúmidor debe gastar $oD-od_1$ cantidades de dinero para obtener ox_1 cantidades del bien x. Si el consumidor gastara todo su dinero obtendría oB cantidades de x. De esta manera el precio de x está dado por la relación oD/oB. Si el nivel de ingresos del consumidor disminuyera habría un desplizamiento de de la curva DB a la curva D'B' por ejemplo. Esto significa que el consumidor ha disminuido su capacidad de compra, a saber de oD, obteniendo oB de x, a oD', obtebteniendo oB' de x solamente. Por otra parte, si el precio de x subiera, el consumidor podría comprar sólo oB'' cantidades de x, según lo muestra la figura. Es decir, los desplazamientos de la línea de precios hacia arriba o hacia abajo, representan cambios en el nivel de ingresos del consumidor, mientras que las variaciones en la pendiente de la línea de precios representan cambios en el precio de la mercancía demandada.

c) El equilibrio del consumidor.- Considérese la siguiente figura.

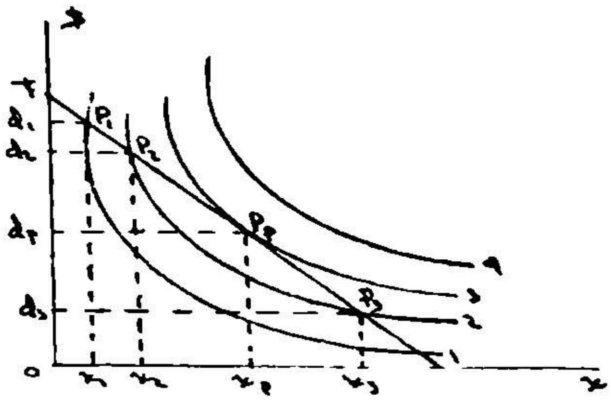

figura 5.-

La figura 5 nos muestra la forma en que el consumidor alcanza la máxima utilidad en la compra del bien x. Considérese el punto P_1. En este punto el consumidor ha gastado Td_1 para obtener ox_1 de x. Su nivel de satisfacción es 1. Si se trasladara al punto P_2 gastando Td_2 de dinero lograría un nivel de satisfacción superior, o sea el representado por la curva de indiferencia 2. Si quisiera seguir aumentando su nivel de satisfacción tendría que comprar sucesivamente mayores cantidades de x hasta alcanzar el punto Pp. En este punto su nivel de satisfacción es 3 y más allá de este punto ya no es posible mejorar de situación. Si el consumidor siguiera comprando cantidades del bien x mas allá de oxp, retornaría a la curva de indiferencia 2 en el punto P_3 de la gráfica. Sólo en el punto Pp, comprando oxp de x, el consumidor está en equilibrio alcanzando el máximo de utilidad o satisfacción representado por la curva de indiferencia 3. Es decir, dado un ingreso fijo (ot) un consumidor estaría en equilibrio, haciendo máxima su utilidad, en el punto en el que la pendiente de la línea de precios es igual a la pendiente de la curva de indiferencia a la cual aquélla es tangente. A la pendiente de una curva de indiferencia se le llama "razón marginal de sustitución".

La formulación matemática del equilibrio del consumidor puede exponerse de la siguiente manera:

Sea

$$U = U\,(x\,,\,y) \qquad (1)$$

una función índice de utilidad donde,

$$U_x (= \partial U / \partial x) > 0$$

$$U_y (= \partial U / \partial y) > 0$$

Aquí,

U= utilidad producida por las mercancías x, y.

Ux= utilidad marginal de x.

Uy= utilidad marginal de y.

-Ux/Uy= razón marginal de sustitución de y por x.

Consideremos ahora la función

$$g = B - xPx - yPy = 0 \qquad (2)$$

que representa la línea de precios. --

Aquí,

x= cantidad del bien x.

y= " " " y.

Px= precio de x.

Py= precio de y.

B= ordenada al origen de la función.

-Px/Py= pendiente de lafunción línea - de precios.

El método que usaremos es el de Lagrange para obtener valores extremos de una función de varias variables (en nuestro caso la utilidad U es función de dos variables: las mercancías x, y). Primera condición: obtenemos la función aumentada - que llamaremos Z. Es decir,

$$Z=U(x,y)+\lambda(B-xPx-yPy) \qquad (3)$$

Esto se hizo sumando la función índice de utilidad (1) con la línea de precios (2) multiplicada por λ. Nuestro propósito es maximizar la función aumentada Z.- Para ello obtenemos las primeras derivadas parciales de Z y las igualamos a cero:

$$Zx(=\partial Z/\partial x)= Ux-\lambda Px=0$$
$$Zy(=\partial Z/\partial y)= Uy-\lambda Py=0$$
$$Z_\lambda(=\partial Z/\partial \lambda)= B-xPx-yPy=0$$

Zx puede expresarse así.

$$Ux/Px= \lambda \qquad (4)$$

Lo mismo podemos hacer con Zy,

$$Uy/Py = \lambda \qquad (5)$$

Ahora igualando (4) con (5) tenemos:

$$Ux/Px = Uy/Py$$

o sea

$$-Ux/Uy = -Px/Py \qquad (6)$$

en donde multiplicamos por -1 en ambos lados de (6).

El lado izquierdo de esta última ecuación representa la razón marginal de sustitución de y por x, mientras que el lado derecho representa la línea de precios del consumidor. Con esto hemos establecido matemáticamente lo expuesto ya en palabras anteriormente acerca del equilibrio del consumidor, es decir, que dicho equilibrio se obtiene igualando la pendiente de la curva de indiferencia correspondiente (-Ux/Uy) a la pendiente de la línea de precios (-Px/Py) del consumi dor. Matemáticamente, sin embargo, es necesario todavía satisfacer una segunda condición.

Segunda condición: obtenemos las segundas derivadas parciales de Z:

$$Zxx=Uxx$$

$$Zyy=Uyy$$

$$Zxy=Zyx=Uxy$$

Es necesario también obtener las primeras derivadas parciales de la línea de precios, las cuales denotaremos por gx y gy:

$$gx = - Px$$

$$gy = - Py$$

Con estos valores podemos formar el determinante llamado "Hessiano bordeado" (bordered Hessian) denotado por $|\bar{H}_2|$ y cuya solución nos da la segunda condición buscada:

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & -P_x & -P_y \\ -P_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -P_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} = 2P_x P_y U_{xy} - P_x^2 U_{yy} - P_y^2 U_{xx} > 0 \qquad (7)$$

la ecuación (7) representa la segunda -- condición para que el consumidor esté en equilibrio.

d) Efectos renta, sustitución y precio.- Tenemos ahora que explicar tres importantes fenómenos en relación a la demanda de una mercancía. En la figura 6 -

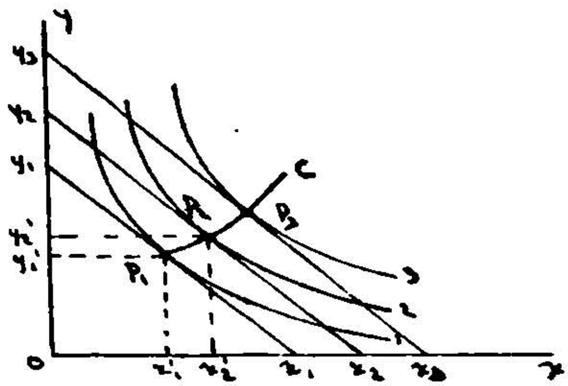

figura 6

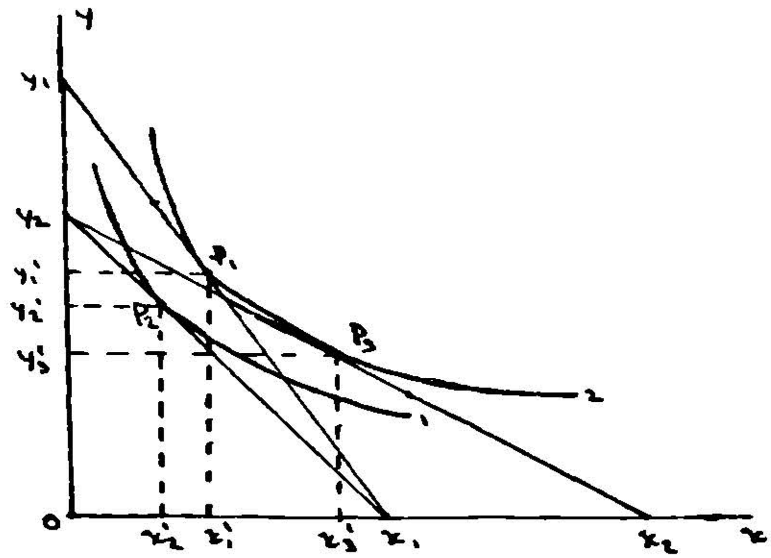

figura 7

se muestra lo que los economistas han-
llamado un "efecto-renta". El efecto renta describe cómo cambia la cantidad demandada de una mercancía al cambiar la renta absoluta del consumidor. Por ejemplo, en el punto P_1 de la figura 6, el consumidor demanda la cantidad ox_1' de

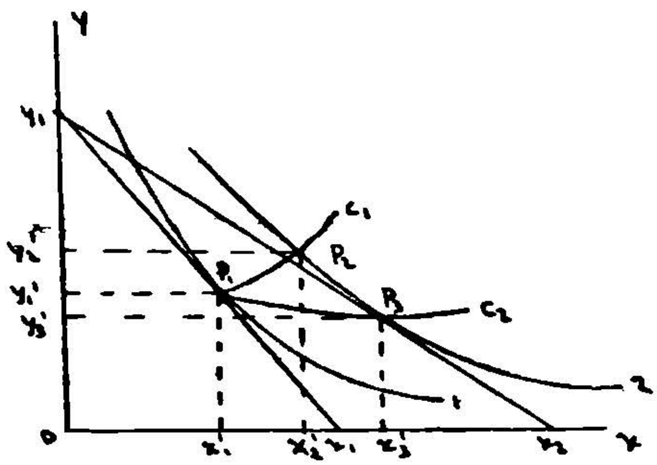

figura 8

x con una renta oy_1' en términos de y. Si la renta del consumidor aumentara de oy_1 a oy_2, ahora podría disponer de ox_2 de x, alcanzando un nivel de satisfacción o utilidad más alto; el representado por la curva de indiferencia 2. Es decir, el efecto renta indica que, sin variar los precios relativos, a un cambio en la renta del consumidor corresponde otro en el --

mismo sentido en la cantidad demandada - de una mercancía.

la figura 7 nos muestra un efecto-- sustitución". Aquí el consumidor obtiene ox_1 cantidades de x con oy_1 de y. En --- equilibrio el consumidor demanda ox_1' de x, gastando y_1 $-y_1'$ de y, estando en el - punto P_1 de la curva de indiferencia 2.- Supóngase ahora que el precio de y en -- términos de x sube. El consumidor reac-- cionará sustituyendo y (que ahora es re- lativamente más caro) por x (que ahora - es relativamente más barato). Esto se -- ilustra en la figura 7. En la situación inicial el consumidor obtiene ox_1 de x,- con oy_1 de y. Pero al subir el precio de y obtendrá la misma cantidad de x (ox_1) con una cantidad de y mucho menor (oy_2). Esto significa que el consumidor ha dis- minuido su nivel de utilidad de P_1, en - la curva de indiferencia 2_1 a P_2 sobre -

la curva de indiferencia 1. Ahora bien, para volver a alcanzar la curva de indiferencia 2 y mejorar su situación, el consumidor tendría que conseguir un aumento compensatorio en su renta en términos de x. Si esto hace se desplazará de la línea de precios $y_2 x_1$ a la $y_2 x_2$. En esta nueva situación el consumidor ha alcanzado nuevamente la curva de indiferencia 2, sólo que ahora demandando ox_3' de x en el punto P_3. Es decir, debido a que el precio de y ha subido, el consumidor sustituirá $y_1' - y_3'$ de y, por $x_3' - x_1'$ de x. Por tanto el efecto-sustitución indica cómo al subir el precio relativo de una mercancía el consumidor la sustituye por otra cuyo precio relativo ha bajado.

Finalmente la figura 8 nos muestra el mecanismo del "efecto-precio". El efecto-precio es el resultado por un lado del efecto-renta y, por otro, del efecto-sustitución. Cuando el precio de una mercancía (digamos x en la figura 8) baja suceden dos cosas: 1) aumenta la renta relativa del consumidor provocando un aumento en la cantidad demandada de la mercancía (efecto-renta); y 2) el consumidor sustituye otras mercancías que ahora son relativamente más caras por la mercancía que se ha abaratado, aumentando la cantidad demandada de ésta última (efecto-sustitución). Esto se observa en la figura 8. Al bajar el precio de x aumenta su cantidad demandada de x'_1 a x'_2 (efecto-renta); y de x'_2 a x'_3 (efecto-sustitución). Por tanto el efecto-precio nos muestra cómo al bajar el precio de una mercancía aumenta su cantidad demandada como resultado del efecto-renta por un lado, y el efecto-sustitución por otro. A la curva

c_2 de la figura 8 se le llama "curva de -precio-consumo" y la utilizamos en la siguiente sección.

e) La curva de demanda.- Estamos ya en condiciones de responder a la pregunta que se planteó inicialmente: ¿Por qué la relación entre el precio y la cantidad demandada de una mercancía es inversa? ¿Por qué al bajar el precio de una mercancía -aumenta la cantidad demandada de ésta?

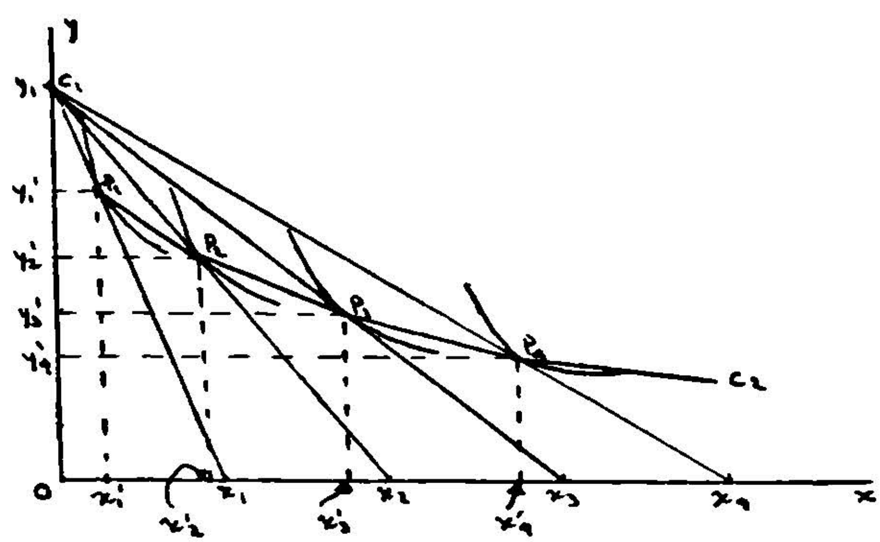

figura 9

La figura 9 nos muestra una curva de

precio-consumo ($c_1 c_2$) correspondiente a distintas cantidades de las mercancías x,y. En el punto P_1 el consumidor se encuentra en equilibrio demandando ox_1' al precio oy_1/ox_1. En el punto P_2 el consumidor ha aumentado la cantidad demandada de x, de ox_1' a ox_2'. En esta nueva situación el precio de x es $(oy_1/ox_2) < (oy_1/ox_1)$. En el punto P_3 se observa otro aumento en la cantidad demandada de x, de ox_2' a ox_3'.- En este punto el precio de x es $(oy_1/ox_3) < (oy_1/ox_2)$. Finalmente, en el punto P_4 vemos que el consumidor ha aumentado la cantidad demandada de x (de ox_3' a ox_4'), comprando x al precio $(oy_1/ox_4) < (oy_1/ox_3)$. Como vemos, a medida que el precio de x baja se da un aumento en la cantidad demandada de ésta. A lo largo de la curva $C_1 C_2$ nos encontramos -

en una nueva situación correspondiente a cada punto de equilibrio P_1, P_2, etc. Pero la curva C_1C_2 no es más que una curva de precio-consumo cuyos puntos representan un efecto-precio para cada cambio en el precio de la mercancía x. Por ejemplo, en el punto P_2 el precio de x bajó de oy_1/ox_1 a oy_1/ox_2, en tanto que la cantidad demandada aumentó de ox_1' a ox_2'. Esto significa que a cada efecto-precio a lo largo de C_1C_2 podemos asociar un cambio tanto en el precio de x como en su cantidad demandada. Dicho de otro modo, la información que nos da la curva C_1 C_2 es la misma que encontramos en una curva de demanda tal como la presentada en la figura 1 de este capítulo. Sólo que la curva C_1C_2 nos expresa la relación entre el precio y la cantidad demandada de una mercancía en términos de los efectos renta, sustitución y precio. Por ejemplo, volviendo al punto P_2 vemos que el aumento en la cantidad demandada de x se debe a dos cosas: 1) a que el precio de x ha bajado provocando un aumento en la renta relativa del consumidor (efecto-renta); y 2) ahora que el precio de x ha bajado el consumidor sustituirá y por x (efecto-sustitución). Es decir, cada punto de la curva $C_1 C_2$ nos muestra cómo al bajar el precio de x aumenta su cantidad demandada como resultado de un efecto-renta y un efecto-sustitución.

II.- ECUACIONES DIFERENCIALES

Por ecuación diferencial ordinaria se entiende una relación en que intervienen una o varias derivadas de una función no conocida y de x, con respecto a x; la relación puede contener también a y, funciones dadas de x y constantes. Por ejemplo,

$$y' = \cos x \qquad (1)$$

$$y'' + 4y = 0 \qquad (2)$$

$$x^2 y''' y' + 2 e^x y'' = (x^2 + 2) y^2 \qquad (3)$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. El término "ordinaria" la distingue de una ecuación diferencial parcial en la que se relacionan derivadas parciales de una función no conocida de dos o más variables independientes. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es una ecuación diferencial parcial. En

este trabajo solamente consideraremos ecuaciones diferenciales ordinarias.
Se dice que una ecuación diferencial ordinaria es de orden n si la derivada de mayor orden que contiene la ecuación es la enésima derivada de y con respecto a x. La noción de orden de una ecuación diferencial conduce a una clasificación útil de las ecuaciones: de primer orden, segundo orden, etc. De este modo, (1) es una ecuación de primer orden, (2) es de segundo orden y (3) es de tercer orden.

Una función

$$y = g(x) \tag{4}$$

es una solución de una ecuación diferencial de primer orden dada, en algún intervalo, digamos, $a<x<b$, si está definida y es derivable en todo el intervalo, y tal que la ecuación se satisface con

las sustituciones de y y y' por ---- g y g', respectivamente. Por ejemplo, la función

$$y = g(x) = e^{2x}$$

es una solución de la ecuación de primer orden

$$y' = 2y$$

para toda x, porque

$$g' = 2e^{2x}$$

e introduciendo g y g', la ecuación se reduce a la identidad

$$2e^{2x} = 2e^{2x}$$

En algunas ocasiones, una solución de una ecuación diferencial se presentará como una función implícita, esto es, en la forma

$$G(x\ y) = 0$$

entonces se dice que es una solución implícita, en contraste con la solución explícita (4). Por ejemplo.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad . \qquad (y \neq 0)$$

es una solución implícita de la ecua---
ción diferencial

$$y' = -\frac{x}{y}$$

En este caso, podemos escribir fácilmente la solución en forma explícita, pero en otros casos puede ser difícil y aun imposible. La tarea principal de la teoría de las ecuaciones diferenciales es encontrar todas las soluciones de una - ecuación diferencial dada e investigar sus propiedades.

Una ecuación diferencial puede tener muchas soluciones. Ilustraremos este hecho por medio de los siguientes -- ejemplos.

Ejemplo I.- Cada una de las funciones

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad y = \operatorname{sen} x + 3, \qquad y = \operatorname{sen} x - \frac{4}{5}$$

es una solución de la ecuación (1)

y sabemos que cualquier solución de la ecuación es de la forma

$$y = \operatorname{sen} x + c \qquad (5)$$

donde c es una constante. Si consideramos c como arbitraria, entonces (5) representa la totalidad de las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 2.- Se puede verificar que cada una de las funciones

$$y = e^x, \quad y = 2e^x, \quad y = -\frac{6}{5}e^x \qquad (6)$$

es una solución de la ecuación.

$$y' = y \,.$$

Cualquier solución de la ecuación es de la forma

$$y = ce^x \qquad (7)$$

donde c es una constante. Considerando c como arbitraria, (7) representa la totalidad de las soluciones de la ecua ción.

Nuestros ejemplos ilustran que una ecuación diferencial puede tener (y en general, así sucede) más de una solución; aún más, puede tener un número infinito de soluciones, las cuales pueden representarse por medio de una fórmula sencilla que contenga una constante arbitraria c. Se acostumbra dar el nombre de solución general de la correspondiente ecuación diferencial de primer orden, a esa función que contiene una constante arbitraria. Si asignamos un determinado valor a esa constante, entonces la solución que se obtenga se llama solución particular. De acuerdo con esto, (7) es una solución general de $y' = y$ y (6) son soluciones particulares.

a) Ecuaciones de variables separables.- Muchas ecuaciones diferenciales

de primer orden pueden reducirse a la -
forma

$$g\ (y)\ y' = f\ (x) \qquad (1)$$

por medio de algunas operaciones alge-- braicas. Ya que $y' = dy/dx$ es convenien te escribir (1) en la forma

$$g\ (y)dy = f\ (x)\ dx \qquad (2)$$

Una ecuación de este tipo se dice que - es una ecuación de variables separables debido a que las variables x y y se han separado una de la otra, de tal mo- do que x aparece solamente a la dere-- cha mientras que y está solamente a - la izquierda. Integrando ambos miembros de (2), obtenemos

$$\int g(y)dy = \int f(x)\ dx + c \qquad (3)$$

Calculando estas integrales se llega a la solución general de (1).

Ejemplo I.- Resolver

$$y' = -\frac{4x}{9y}$$

Separando las variables tenemos

$$y\,dy = -\frac{4}{9}\,x\,dx$$

Integrando ambos miembros obtenemos la solución general

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{2}{9}x^2 + c \qquad 6$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = c$$

Ejemplo 2.- Resolver el problema con valor inicial

$$(x^2 + 1)\,y' + y^2 + 1 = o, \qquad y(o)=1$$

Separando variables, encontramos

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{-dx}{1+x^2}$$

Integrando

$$\text{arc tg}y = -\text{arc tg}x + c$$

o bien

$$\text{arc tg}y + \text{arc tg}x = c$$

tomando la tangente de ambos miembros, tenemos

$$tg(\text{arc tg}y + \text{arc tg}x) = tgc. \qquad (4)$$

La fórmula de la tangente de la suma de ángulos es

$$tg\,(a+b) = \frac{tga + tgb}{1-tga \quad tgb}$$

Haciendo $a = \text{arc tg}y$ y $b = \text{arc tg}x$, esta igualdad se transforma en

$$\text{tg}\,(\text{arctg}y + \text{arc tg}x) = \frac{y+x}{1-xy}$$

En consecuencia (4) puede escribirse

$$\frac{y+x}{1-xy} = \text{tg}c \qquad (5)$$

Determinamos c a partir de la condición inicial. Dando los valores $x = o$, $y = 1$ en (5), tenemos $\text{tg}c = 1$, de modo que

$$\frac{y+x}{1-xy} = 1 \qquad \text{o bien}$$

$$y = \frac{1-x}{1+x}\,.$$

Ciertas ecuaciones diferenciales de primer orden no son separables, pero pueden llevarse a esa forma mediante un sencillo cambio de variables. Esta afirmación se cumple para ecuaciones de la forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (6)$$

donde g es una función cualquiera dada de y/x; por ejemplo, $(y/x)^3$, sen (y/x), etc. La forma de la ecuación sugiere que hagamos

$$\frac{y}{x} = n ,$$

recordando que y y n son funciones de x. Entonces $y = nx$ y, derivando,

$$y' = n + n'x. \qquad (7)$$

Sustituyendo esta expresión en (6), obtenemos

$$n + n'x = g(n)$$

Ahora podemos separar las variables, encontrando

$$\frac{dn}{g(n)-n} = \frac{dx}{x}$$

Integrando y reemplazando n por y/x se tiene la solución general de (6).

Ejemplo.- Resolver

$$2xyy' - y^2 + x^2 = o$$

Dividiendo entre x^2, tenemos

$$2 \frac{y}{x} y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = o$$

Haciendo $n = y/x$ y usando (7), la ecuación se transforma en

$$2n\,(n + n'x) - n^2 + 1 = o \quad \text{o sea}$$

$$2xnn' + n^2 + 1 = o$$

Separando variables encontramos

$$\frac{2n\ dn}{1+n^2} = -\frac{dx}{x}$$

e integrando

$$\ln(1+n^2) = -\ln x + c \quad \text{o bien}$$

$$1 + n^2 = \frac{c}{x}$$

Sustituyendo n por y/x, obtendremos finalmente

$$x^2 + y^2 = cx \ .$$

b) Ecuaciones lineales de primer orden.- Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es lineal si puede escribirse en la forma

$$y' + f(x)\, y = r(x) \ . \qquad (1)$$

El rasgo característico de esta ecuación es que es lineal en y y y', mientras que f y r pueden ser cualesquiera funciones dadas de x. Si $r(x) = 0$, para toda x, se dice que la ecuación es homogénea; en caso contrario se dice que es no homogénea. Deduciremos una fórmula para encontrar la solución general de (1) en algún intervalo I, suponiendo que f y r son continuas en I. Para la ecuación homogénea

$$y' + f(x)\, y = o \qquad (2)$$

resulta sencillo. Separando variables, tenemos

$$\frac{dy}{y} = - f(x)dx \qquad \text{y, por tanto,}$$

$$\ln y = - \int f(x)\, dx + c$$

o sea

$$y(x) = c\, e^{-\int f(x)\, dx} \qquad (3)$$

Para resolver la ecuación no homogénea (1), la escribiremos en la forma

$$(fy - r)\, dx + dy = o$$

y demostraremos que es posible hallar un factor integrante F(x) que depende solamente de (x). Si ese factor existe,

$$F(x)\, (f\, y - r)\, dx + F(x)\, d\, y = o$$

debe ser exacta. Ahora, para esta ecuación,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{F\,(fy - r)\right\} = dF/dx, \text{o sea}$$

$$Ff = \frac{dF}{dx}$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\ln F = \int f\,(x)\,dx$$

y de esta igualdad

$$F\,(X) = e^{h(x)} \text{ donde } \quad h\,(x) = \int f(x)dx$$

Esto demuestra que $F(x)$ es un factor integrante de (1). Ahora al multiplicar -- (1) por este factor encontramos

$$e^{h}\,(y' + fy) = e^{h} r.$$

Puesto que $h' = f$, podemos escribir

$$\frac{d}{dx}\,(y\,e^{h}) = e^{h} r.$$

Ahora podemos integrar ambos miembros y obtener

$$y\,e^{h} = \int e^{h} r\,dx + c\;.$$

Dividiendo ambos miembros entre e^{h}, - llegamos a la fórmula deseada

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right]\;.$$

$$h = \int f\,(x)\,dx\;, \qquad (4)$$

y representa la solución general de (1) en la forma de una integral.

Ejemplo 1.- Resolver la ecuación diferencial lineal

$$y' - y = e^{2x}$$

Aquí

$$f = -1 \qquad r = e^{2x},$$

$$h = \int f\,dx = -x$$

y, empleando (4), obtenemos la solución general

$$y(x) = e^{x}\left[\int e^{-x} e^{2x}\,dx + c\right] = ce^{x} + e^{2x}$$

Ejemplo 2.- Resolver el problema con valor inicial

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{sen}\,2x\,. \qquad y(0) = 1\,.$$

Aquí $f = \mathrm{tg}\,x$, $r = \mathrm{sen}\,2x = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$

y

$$\int f\,dx = \int \mathrm{tg}\,x\,dx = \ln \sec x\,.$$

De aquí vemos que en (4),

$$e^{h} = \sec x, \qquad e^{-h} = \cos x, \qquad e^{h} r = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

y la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = \cos x\left[\, 2 \int \operatorname{sen} x \, dx + c \right] =$$

$$c \cos x - 2 \cos^2 x \; .$$

De acuerdo con la condición inicial, --

$y = 1$ cuando $x = o$, se tiene

$$1 = c - 2 \quad \text{o sea} \quad c = 3$$

y la solución de nuestro problema con valor inicial es

$$y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x.$$

c) Ecuaciones lineales de segundo orden.-

Una ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes puede representarse de la siguiente manera:

$$y'' + ay' + by = o, \tag{1}$$

donde a y b son constantes, Recordemos que la solución de la ecuación lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes --

$$y' + k\,y = o \; ,$$

es una función exponencial, a saber

$$y = ce^{-kx} \; .$$

Es posible suponer que

$$y = e^{\lambda x}. \tag{2}$$

puede ser una solución de (1) si se es

coge λ apropiadamente. Sustituyendo en (1) la solución (2) y sus derivadas

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

obtenemos

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)\, e^{\lambda x} = 0$$

De modo que (2) es una solución de (1), si λ es una solución de la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 . \qquad (3)$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación característica o ecuación auxiliar de (1); sus raíces son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4ab}\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4ab}\right). \qquad (4).$$

Apoyándonos en el razonamiento seguido, se deduce que las funciones

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad y \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \qquad (5)$$

son soluciones de (1).

Ejemplo.- Hallar las soluciones de la ecuación

$$y'' + y' - 2y = 0$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Las raíces son 1 y -2, y así obtenemos las soluciones

$$y_1 = e^x \qquad y \qquad y_2 = e^{-2x} .$$

Las soluciones de la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$(a, b \text{ reales}) \qquad (6)$$

pueden obtenerse mediante un procedimiento puramente algebraico, es decir, determinando las raíces λ_1, λ_2 de la ecuación característica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \qquad (7)$$

y estas soluciones son de la forma

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x} \qquad (8)$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ estas soluciones constituyen un sistema fundamental para toda x. Si estas raíces distintas son reales entonces las soluciones (8) son reales. Sin embargo, si λ_1 y λ_2 son complejas conjugadas, digamos

$$\lambda_1 = p + iq , \qquad \lambda_2 = p - iq$$

$$(p, q, \text{ reales}, \ q \neq 0)$$

entonces las soluciones (8) son complejas,

$$y_1 = e^{(p + iq)x}$$
$$y_2 = e^{(p - iq)x}$$

y tiene una gran importancia práctica el poder obtener soluciones reales a partir de estas soluciones complejas. Esto puede hacerse aplicando las fórmulas de Euler.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta ,$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta ,$$

tomando $\theta = qx$. De esta manera y_1 resulta ser

$$y_1 = e^{(p+iq)x} = e^{px} \, e^{iqx} = e^{px} (\cos qx + i \operatorname{sen} qx)$$

y aplicando la segunda fórmula de Euler,

$$y_2 = e^{(p-iq)x} = e^{px}\, e^{-iqx} = e^{px}$$

$$(\cos qx - i \operatorname{sen} qx) \ .$$

De estas dos expresiones para y_1 y y_2, obtenemos

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{px} \cos qx.$$

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{px} \operatorname{sen} qx \ .$$

Vemos que las dos funciones de los segundos miembros, son reales y son soluciones de la ecuación diferencial (6); por lo tanto constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (6) en todo el eje x. La solución general correspondiente es

$$y(x) = e^{px}(A \cos qx + B \operatorname{sen} qx) \qquad (9)$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.- Hallar una solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + 10\, y = 0$$

La ecuación característica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

tiene las raíces $\lambda_1 = p + iq = 1 + 3i$, y $\lambda_2 = p - iq = 1 - 3i$.
Así que $p = 1$, $q = 3$ y la respuesta es

$$y = e^x (A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x).$$

Ejemplo 2.- Resolver el problema -- con valor inicial

$$y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 4 \ , \quad y'(0) = 1.$$

Un sistema fundamental de soluciones es

$$e^x \cos 3x \quad \text{y} \quad e^x \operatorname{sen} 3x$$

Ver el ejemplo anterior. La solución general correspondiente es

$$y(x) = e^x (A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$

y $y(0) = A$, Derivando,

$$y'(x) = e^x \left[(A + 3B)\cos 3x + (B - 3A)\operatorname{sen} 3x \right]$$

se obtiene $y'(0) = A + 3B$. Con estos resultados y las condiciones iniciales dadas,

$$y(0) = A = 4 \ ,$$

$$y'(0) = A + 3B = 1 \ .$$

Por lo tanto, $A = 4$, $B = -1$ y la respuesta es: $y = e^{x}(4 \cos 3x - \operatorname{sen} 3x)$.

Sobre las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes, de la forma

$$y'' + a y' + by = o \qquad (10)$$

ahora consideraremos el caso en el que la ecuación característica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = o \qquad (11)$$

tiene una raíz doble o repetida. Este caso se presenta sí y sólo si el discriminante de (11) es igual a cero.

La raíz es $\lambda = -a/2$ y, en principio, obtenemos solamente una solución

$$y_1 = e^{\lambda x} \qquad (\lambda = -\frac{a}{2}) \qquad (12)$$

En el caso de una raíz doble de (11), otra solución de (10) es

$$y_2 = xe^{\lambda x} \qquad (\lambda = -\frac{a}{2}); \qquad (13)$$

las dos soluciones (12) y (13) constituyen un sistema fundamental y la solución general correspondiente es, por tanto,

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} .$$

Ejemplo 1.- Resolver

$$y'' + 8\,y' + 16y = 0$$

La ecuación característica tiene la raíz doble $\lambda = -4$, Por lo tanto, un sistema fundamental de soluciones es

$$e^{-4x} \qquad y \qquad xe^{-4x}$$

y la solución general correspondiente es

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-4x}$$

Ejemplo 2.- Resolver el problema con valor inicial

$$y'' - 4\,y' + 4y = 0.$$

$$y(0)=3 \qquad y'(0)= 1$$

Una solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Derivando, obtenemos

$$y'(x) = c_2 e^{2x} + 2(c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Con este resultado y las condiciones iniciales, se sigue que,

$$y(o)=c_1=3 \qquad y'(o)=c_2+2c_1=1$$

Por lo tanto, $c_1=3$, $c_2=-5$ y la respuesta es

$$y=(3-5x)e^{2x}.$$

Hasta el momento sólo se han considerado ecuaciones lineales homogéneas. Ahora discutiremos las ecuaciones lineales que son no homogéneas. Concentraremos nuestra atención en las ecuaciones de segundo orden

$$y''+f(x)y'+g(x)y=r(x),$$

sin embargo, los resultados obtenidos se pueden generalizar para las ecuaciones lineales de cualquier orden.

Una solución general $y(x)$ de la ecuación diferencial lineal no homogénea, es la suma de una solución general $yn(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente y una solución particular arbitraria $yp(x)$:

$$y(x) = y_n(x) + y_p(x).$$

De esta manera, para obtener una solución general de la ecuación lineal no homogénea, necesitamos una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación. ¿Cómo podemos encontrar esa función Y_p? Uno de los métodos se conoce con el nombre de método de los coeficientes indeterminados.

El método es apropiado para las ecuaciones con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (14)$$

cuando $r(x)$ es tal que su forma permite tener una idea muy clara de una solución particular $y_p(x)$ de (14); por ejemplo, r puede ser una potencia de x, un polinomio, una función exponencial, un seno o coseno o la suma de esas funciones. El método consiste en suponer para y_p una expresión semejante a la de $r(x)$, que contenga coeficientes desconocidos, los cuales se determinan sustituyendo y_p y sus derivadas en (11).

Ejemplo 1.- Resolver la ecuación no -homogénea

$$y'' + 4\,y = 12 \qquad (15)$$

Se puede intentar $y_p = k$, es decir, una constante. Entonces $y_p'' = 0$. Sustituyendo, $4k = 12$. Por lo tanto, $y_p = k = 3$. Una solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_h = A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x\ .$$

De aquí que una solución general de (15) es

$$y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x + 3.$$

Ejemplo 2.- Resolver la ecuación no homogénea

$$y'' + 4y = 8x^2\ . \qquad (16)$$

Se puede probar con

$y_p = kx^2 + Lx + M$. Entonces

$$y''_p = 2k$$

sustituyendo en (16) se llega a

$$2k + 4\,(kx^2 + Lx + M) = 8x^2$$

Igualando los coeficientes de x^2, x y x^0, de ambos miembros, se obtiene $4k= 8$, $4L = 0$, $2k+ 4M = 0$. Y así se obtiene $k= 2$, $L=0$, $M = -1$. De aquí que $y_p=2x^2 -1$ y la solución general de (16) es

$$y= A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x + 2x^2 - 1$$

Ejemplo 3.- Resolver la ecuación no homogénea

$$y'' - y' - 2y = 10 \cos x \qquad (17)$$

Si se supone que

$$y_p = k \cos x + M \operatorname{sen} x$$

Entonces,

$$y'_p = - k \operatorname{sen} x + M \cos x$$

$$y''_p = - k \cos x - M \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo estas expresiones en (17), se obtiene

$$(-3k - M) \cos x + (k - 3M) \operatorname{sen} x = 10 \cos x$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, en ambos miembros, se tiene

$$-3k - M = 10 \qquad k - 3M = 0$$

De aquí que $k = -3$, $M = -1$ y $y_p = -3 \cos x -$ $\operatorname{sen} x$. Una solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} .$$

y finalmente,

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 3 \cos x - \operatorname{sen} x$$

III.- UN MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO

En los dos capítulos anteriores hemos explicado las teorías de las que nos valdremos ahora para construir un modelo de crecimiento económico. Antes de hacerlo, sin embargo, es necesario hacer algunas indicaciones. En primer término, hacemos notar que la teoría económica aquí utilizada nos servirá más bien metodológicamente. Es decir, al construir el modelo no pretenderemos extraer conclusiones relativas a la teoría económica en sí misma. Los conceptos económicos nos servirán sólo para plantear las ecuaciones básicas del modelo y, a partir de ahí, obtener la trayectoria del producto en el tiempo. En cuanto a las ecuaciones diferenciales, utilizamos ecuaciones lineales de primero y segundo órdenes. Los métodos de resolución explicados en el -

capítulo dos son los que emplearemos para resolver el modelo.

Nuestro punto de partida es el concepto de equilibrio del consumidor. En el capítulo uno explicamos que para que el consumidor esté en equilibrio es necesario que escoja aquella combinación de productos en la que la pendiente de una curva de indiferencia sea igual a la pendiente de su linea de precios. Es decir, en el punto en el que la linea de precios es tangente a una curva de indiferencia en el mapa de indiferencia, el consumidor está en equilibrio obteniendo la máxima utilidad.

Imagínese ahora que en lugar de un consumidor individual tenemos a una sociedad en su conjunto. Toda sociedad dispone de recursos limitados y ha de buscar la mejor manera de aprovecharlos. Co mo el consumidor individual, la sociedad dispone de un número infinito de alternativas representadas en su mapa de indiferencia; y, de la misma manera que el consumidor racional busca el equilibrio para obtener la máxima utilidad personal,- la sociedad buscará aquella combinación en la que se logre alcanzar la máxima -- utilidad social, es decir, el mayor bienestar general.

a) 1a. versión: crecimiento exponencial a 6 años.- Iniciamos la construcción del modelo con dos funciones lineales. Estas son:

$$RMS = ay(t) + b + cy'(t) \qquad (a<o;b,c>o) \qquad (1)$$

$$PIP = \alpha y(t) + \beta + \gamma y'(t) \qquad (\beta < 0;\alpha,\gamma>0) \qquad (2)$$

La ecuación (1) representa la razón marginal de sustitución (RMS) y la ecuación (2) representa la pendiente de la línea de precios (PIP). Ambas son funciones --

del tiempo y la expresión y'(t) (derivada del producto y con respecto al tiempo) representa el elemento dinámico en ambas funciones. Por tanto, en este modelo y representa el producto y t el tiempo.- Las letras a,b,c, α, β y γ son parámetros del modelo. La ecuación (1) se interpreta como el comportamiento de la razón marginal de sustitución a través del tiempo. La misma interpretación tiene la ecuación (2), sólo que en lugar de la razón marginal de sustitución es la pendiente de la línea de precios la variable estudiada. Según la teoría económica en equilibrio la razón marginal de sustitución y la pendiente de la línea de precios son iguales. Esto significa que para que la sociedad esté gastando sus recursos monetarios óptimamente, alcanzando el máximo bienestar general, es necesa--

rio que las funciones (1) y (2) sean igualadas. De esta manera, el sistema se encontrará en desequilibrio y tardará algún tiempo volver a la estabilidad y equilibrio del sistema. Por tanto el mecanismo del sistema depende de si las funciones RMS y PLP son iguales o no. En ésta primera versión del modelo veremos que el equilibrio se alcanza en 6 años.

Igualando (1) y (2) tenemos:

$$ay(t)+b+cy'(t)=\alpha y(t)+\beta+\gamma y'(t).$$

Despejando $y'(t)$ se tiene:

$$y'(t)=\frac{\alpha-a}{c-\gamma}\;y(t)\;+\frac{\beta-b}{c-\gamma}$$

que es igual a

$$\frac{\alpha-a}{c-\gamma}\;y(t)-\frac{b-\beta}{c-\gamma}$$

o lo que lo mismo

$$y'(t)=\frac{\alpha-a}{c-\gamma}\left[y(t)-\frac{b-\beta}{\alpha-a}\right]$$

o sea finalmente

$$y'(t)=\frac{\alpha-a}{c-\gamma}\left[y(t)-\bar{y}\right] \qquad (3)$$

en donde

$$\bar{y} = \frac{b - \beta}{\alpha - a}$$

Hagamos ahora

$$\lambda = \frac{\alpha - a}{c - \gamma}$$

y sustituyendo en (3) se tiene:

$$y'(t) = \lambda \left[y(t) - \bar{y} \right]$$

o sea

$$y'(t) - \lambda y(t) = -\lambda \bar{y} \qquad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuyo método de resolución se explicó en el capítulo anterior. Por tanto la solución de (4) es

$$y(t) = e^{\lambda t} \left[\int e^{-\lambda t} (-\lambda \bar{y}) dt + c_1 \right]$$

que es igual a

$$e^{\lambda t} (\bar{y}\, e^{-\lambda t} + c_1)$$

o sea

$$y(t) = \bar{y} + c_1 \; e^{\lambda t} \qquad (5)$$

La ecuación (5) representa la trayectoria del producto $y(t)$ en el tiempo. Aquí, $\bar{y}$ representa el equilibrio, es decir, la situación en la que la sociedad asigna óptimamente sus recursos monetarios. Para eliminar c_1 y particularizar la solución, tenemos que establecer las condiciones iniciales del problema. Hagámos

$$t = 0$$

entonces

$$y(0) = y_0$$

por tanto

$$c_1 = y_0 - \bar{y}$$

luego

$$y(t) = \bar{y} + (y_0 - \bar{y})\, e^{\lambda t} \qquad (6)$$

Esta es nuestra ecuación definitiva para la primera versión del modelo, como ya se explicó $\bar{y}$ representa el equilibrio. La expresión

$$(y_0 - \bar{y})\, e^{\lambda t} \qquad (7)$$

es el elemento inestable del sistema. Para $\lambda < 0$ la expresión (7) tiende a cero y la ecuación (6) tenderá al equilibrio $\bar{y}$. Para $\lambda \geq 0$ el sistema no está en equilibrio. El comportamiento del producto y en el tiempo se muestra en la figura 1a.

Vamos ahora a asignar valores numéricos a los parámetros del modelo. Sean

$$a = -0{,}05$$

$$b = 0{,}002$$

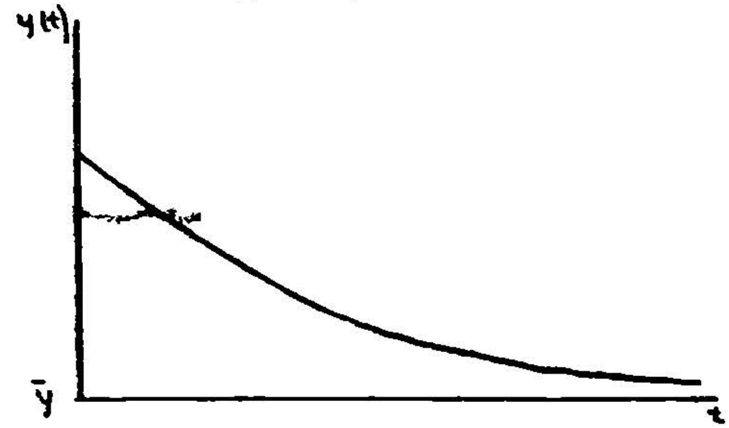

figura 1a.

$$c = 0{,}01$$
$$\alpha = 0{,}08$$
$$\beta = -0{,}003$$
$$\gamma = 0{,}14$$
$$y_0 = 0{,}05$$

Las ecuaciones (1) y (2) quedan ahora así

$$RMS = -\ 0{,}05\ y + 0{,}002 + 0{,}01\ y'$$
$$PLP = 0{,}08\ y - 0{,}003 + 0{,}14\ y'\ .$$

Calculando λ tenemos:

$$\lambda = \frac{0{,}13}{-0{,}13} = -1$$

Calculamos ahora $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{0{,}005}{0{,}13} = 0{,}0385$$

Por tanto, la ecuación (6) queda como si gue:

$$y(t) = 0{,}0385 + 0{,}012\ e^{-t} \qquad (8)$$

En el cuadro 1 tabulamos algunos valores para esta versión del modelo. Como se ve los valores numéricos asignados a los parámetros del modelo, conducen a - un valor de equilibrio (o,0385) que sólo se alcanza transcurridos 6 años a partir del valor inicial y(0)= 0,05. Esto significa que si la economía crece al 5% en el año cero, tardaría 6 años alcanzar la ta-

t (años)	y(t) (tasa de crecimiento)
0	0,0500
1	0,0429
2	0,0401
3	0,0391
4	0,0387
5	0,0386
6	0,0385

Cuadro 1"a"

sa del 3,85% de equilibrio, en la que la sociedad asigna de la mejor manera sus recursos monetarios.

b) 2a. versión: crecimiento exponencial a 2 años.- Las siguientes versiones -

del modelo resultan de la resolución de una ecuación diferencial de segundo orden. La solución de esta ecuación presenta tres casos, según el tipo de las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial: raíces reales y distintas, raíz doble y raíces complejas-conjugadas. Cada uno de estos casos conduce a una versión del modelo y, por tanto, a una trayectoria del producto en el tiempo. En esta sección trataremos con el caso de raíces reales y distintas. Sean

$$RMS = j_1 + k_1 y + m_1 y' + n_1 y'' \qquad (1)$$

$$PIP = j_2 + k_2 y + m_2 y' + n_2 y'' \qquad (2)$$

la función razón marginal de sustitución y la función pendiente-linea de precios.- Respectivamente. Aquí:

$$j_1 > 0$$

$$k_1 < 0$$

$$J_2 < 0$$

$$k_2 > 0$$

Igualando (1) y (2) tenemos:

$$j_1 + k_1 y + m_1 y' + n_1 y'' = j_2 + k_2 y + m_2 y' + n_2 y''$$

Reagrupando términos se tiene:

$$(n_1 - n_2)y'' + (m_1 - m_2)y' + (k_1 - k_2)y = -(j_1 - j_2) \quad (3)$$

Haciendo ahora,

$$\begin{aligned} n &= n_1 - n_2 \\ m &= m_1 - m_2 \\ k &= k_1 - k_2 \\ j &= j_1 - j_2 \end{aligned} \quad (4)$$

y sustituyendo en (3) se tiene

$$ny'' + my' + ky = -j \quad (5)$$

Dividiendo (5) por n obtenemos:

$$y'' + m/ny' + k/ny = -j/n \quad (6)$$

donde

$$n \neq 0$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial de segundo orden que consta de dos solucio-- nes. A continuación obtenemos la solución -- particular, a la que llamaremos yp. Sea

$$y_p = k_0 \quad (7)$$

donde k_0 es una constante cuyo valor hay --

determinar. Para ello obtenemos la primera y segunda derivadas de yp. Estas son:

$$y'p = 0 \qquad (8)$$

$$y''p = 0 \qquad (9)$$

Sustituyendo (7), (8) y (9) en (6) tenemos:

$$k/n\ k_0 = -j/n$$

o sea,

$$k_0 = -\,j/k$$

Pero ya que $k_0 = yp$ se tiene que

$$yp = -j/k \qquad (10)$$

La ecuación (10) es la solución particular de (6).

Como ya se indicó la solución general de (6) presenta tres casos. En esta sección tratamos el caso de raíces reales y distintas. Sea

$$\lambda^2 + m/n\,\lambda + k/n = 0 \qquad (11)$$

la ecuación característica de (6). Para

$$(m/n)^2 > 4\ k/n$$

las raíces de (11) son:

$$\lambda_1 = 1/2 \left[-m/n + \sqrt{(m/n)^2 - 4k/n} \right] \quad (12)$$

$$\lambda_2 = 1/2 \left[-m/n - \sqrt{(m/n)^2 - 4k/n} \right] \quad (13)$$

Por tanto, la solución general de (6) queda como sigue:

$$y(t) = c_1\ e^{\lambda_1 t} + c_2\ e^{\lambda_2 t} \quad (14)$$

Sumando ahora (10) y (14) tenemos:

$$y(t) = c_1\ e^{\lambda_1 t} + c_2\ e^{\lambda_2 t} - j/k \quad (15)$$

La ecuación (15) es la solución completa - de (6) y representa nuestra ecuación básica para el caso de raíces reales y distintas. Tenemos ahora que particularizar las constantes c_1 y c_2.

Derivando (15) se obtiene:

$$y'(t) = c_1 \lambda_1\ e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2\ e^{\lambda_2 t}$$

Las condiciones iniciales del problema --- son:

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = y_1$$

Por tanto,

$$y_0 = c_1 + c_2 - j/k$$
$$y_1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \qquad (16)$$

Reagrupando términos en las ecuaciones - (16) tenemos:

$$c_1 + c_2 = y_0 + j/k$$
$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = y_1 \qquad (17)$$

Las ecuaciones (17) forman un sistema de ecuaciones lineales simultáneas en dos - incógnitas c_1 y c_2. La solución es la siguiente:

$$c_1 = y_0 + j/k - \frac{(y_0 - j/k)\lambda_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad (18)$$

$$c_1 = \frac{(y_0 - j/k)\lambda_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad (19)$$

Por tanto, la segunda versión del modelo queda así:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - j/k \qquad (20)$$

donde λ_1, λ_2, c_1 y c_2 están dadas por las ecuaciones (12), (13), (18) y -- (19) respectivamente.

Asignamos ahora valores numéricos a los parámetros del modelo. Sean

$j_1 = 0{,}002$

$k_1 = -0{,}05$

$m_1 = 0{,}01$

$n_1 = 0{,}02$

$j_2 = -0{,}003$

$k_2 = 0{,}08$

$m_2 = 0{,}04$

$n_2 = 0{,}01$

$y_0 = 0{,}05$

$y_1 = 0{,}04$

Las ecuaciones (1) y (2) quedan así:

$RMS = 0{,}002 - 0{,}05y + 0{,}01y' + 0{,}02y''$

$PLP = -0{,}003 + 0{,}08y + 0{,}04y' + 0{,}01y''$

Calculando el valor de equilibrio tenemos:

$-j/k = 0{,}0385$

Con esto podemos calcular ahora λ_1 y λ_2 :

$\lambda_1 = 5{,}41$

$\lambda_2 = -2{,}41$

Finalmente calculamos c_1 y c_2:

$$c_1 = -0,045$$

$$c_2 = 0,056$$

Por tanto, la ecuación (20) queda:

$$v(t) = -0,045\, e^{5,41t} + 0,056\, e^{-2,41t} + 0,0385$$

En esta versión del modelo el comportamiento del producto y en el tiempo es de la misma forma que el de la versión anterior mostrado en la figura 1 de la sección anterior. Sin embargo, debido a los valores numéricos dados a los parámetros de las ecuaciones básicas del modelo en esta segunda versión, el alcance del valor del equilibrio (3,85%) no se logra en ningún período de tiempo. Esto se muestra en el cuadro 1b. Como se ve partiendo de una

t	v(t)
años	(tasa de crecimiento)
0	0,0495
1	-10,02
2	-2250,46

Cuadro 1b

situación de desequilibrio en el período - $t = 0$, a una tasa de crecimiento del 5%, - a los dos años ya es imposible alcanzar la tasa de crecimiento de equilibrio de ----- 3,85%.

c) 3a. versión: Crecimiento exponencial a 7 años.- En la sección anterior resolvimos la ecuación

$$y'' + m/n\, y' + k/n\, y = -\, j/n \qquad (1)$$

para el caso de raíces reales y distintas. Esta solución nos llevó a la segunda versión del modelo. Para obtener la tercera - versión resolveremos la ecuación (1) para el caso de raíz doble. En la sección anterior se mencionó que la solución particular de (1) es:

$$y_p = -\, j/k \qquad (2)$$

la solución general de (1) para $(m/n)=4k/n$ es

$$y(t) = (c_1 + c_2\, t)\, e^{at} \qquad (3)$$

donde,

$$\lambda = -\, m/2\, n$$

Sumando (2) y (3) obtenemos la solución de (1)

$$y(t) = (c_1 + c_2\, t)\, e^{\lambda t} + (-j/k) \qquad (4)$$

Para obtener c_1 y c_2 determinamos las condiciones iniciales del problema. Estas --- son:

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = y_1$$

Derivando (4) tenemos:

$$y'(t) = \lambda\, (c_1 + c_2\, t)\, e^{\lambda t} + c_2\, e^{\lambda t}$$

Nos queda, por tanto, el siguiente sistema de ecuaciones

$$y_0 = c_1 - j/k$$

$$y_1 = \lambda_1 c_1 + c_2$$

la solución de este sistema es:

$$c_1 = y_0 + j/k$$

$$c_2 = y_1 - \lambda\, (y_0 + j/k)$$

que son los valores c_1 y c_2 de la e--

cuación (4). Asignando valores numéricos a los parámetros del modelo tenemos:

$$j_1 = 0{,}002$$

$$k_1 = -0{,}05$$

$$m_1 = 0{,}04$$

$$n_1 = 0{,}02$$

$$j_2 = -0{,}003$$

$$k_2 = 0{,}08$$

$$m_2 = 0{,}01$$

$$n_2 = 0{,}01$$

Aquí,

$$-\ j/k = 0{,}0385$$

$$\psi_1 = 0{,}04$$

$$\psi_0 = 0{,}05$$

$$\lambda = -1{,}5$$

$$c_1 = 0{,}01$$

$$c_2 = 0{,}06$$

Por tanto, las ecuaciones (1) y (2) quedan así:

$$RMS = 0,002 - 0,05y + 0,04v' + 0,02y''$$

$$PLP = -0,003 + 0,08v + 0,01y' + 0,01y''$$

y la ecuación (4) queda de este modo:

$$y(t) = (0,01 + 0,06t)e^{-1,5t} + 0,0385$$

que es la trayectoria del producto para los parámetros dados.

El cuadro 1c nos muestra cómo, en esta versión del modelo, el equilibrio se obtiene en un período de 7 años.

t (años	y(t) (tasa de crecimiento)
0	0,0500
1	0,0541
2	0,0450
3	0,0406
4	0,0391
5	0,0387
6	0,0386
7	0,0385

Cuadro 1c

d) 4a. versión: Crecimiento cíclico a 4 años.- Obtenemos ahora la última versión de nuestro modelo. Aquí,

$$(m/n) < 4k/n$$

Por tanto,

$$\lambda = 1/2 \left[-m/n \pm \sqrt{(m/n)^2 - 4k/n}\ i\right]$$

Hagamos ahora,

$$P = -m/2n$$

y

$$q = 1/2 \sqrt{(m/n)^2 - 4k/n}$$

Para obtener la 4a. versión de nuestro modelo de crecimiento económico:

$$y(t) = e^{pt}(c_1 \cos qt + c_2 \operatorname{sen} qt) - J/k \qquad (1)$$

Para obtener c_1 y c_2 derivamos (1):

$$y'(t) = e^{pt}(-c_1 q \operatorname{sen} qt + c_2 q \cos qt$$
$$+ c_1 p \cos qt + c_2 p \operatorname{sen} qt)$$

Una vez más las condiciones iniciales del problema son:

$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = y_1$$

de donde,

$$v_0 = c_1 - j/k$$

o sea

$$c_1 = v_0 + j/k$$

También se tiene que:

$$v_1 = c_2 q + c_1 p$$

es decir,

$$c_2 = 1/q(v_1 - v_0 p + jp/k)$$

Asignando valores numéricos a los parámetros del modelo tenemos:

RIS= 0,002-0,05v + 0,04v' + 0,02v"

PIP= -0,003+0,08v+0,01v'+0,01v"

Podemos calcular ahora el valor de equilibrio

$$-j/k = 0,0385$$

Asignando valores a v_0 y v_1, tenemos:

$$v_0 = 0,05$$

$$v_1 = 0,04$$

Calculando ahora P, c_1 y c_2 se tiene:

$$P = -1{,}5$$
$$q = 3{,}9$$
$$c_1 = 0{,}01$$
$$c_2 = 0{,}04$$

Por tanto, la ecuación (1) queda de la siguiente manera:

$$y(t) = e^{-1{,}5t}\left[0{,}01\cos(3{,}9)t + 0{,}04\operatorname{sen}(3{,}9)t\right] + 0{,}0385$$

El comportamiento del producto en el tiempo de esta versión del modelo se muestra en la figura 1d.

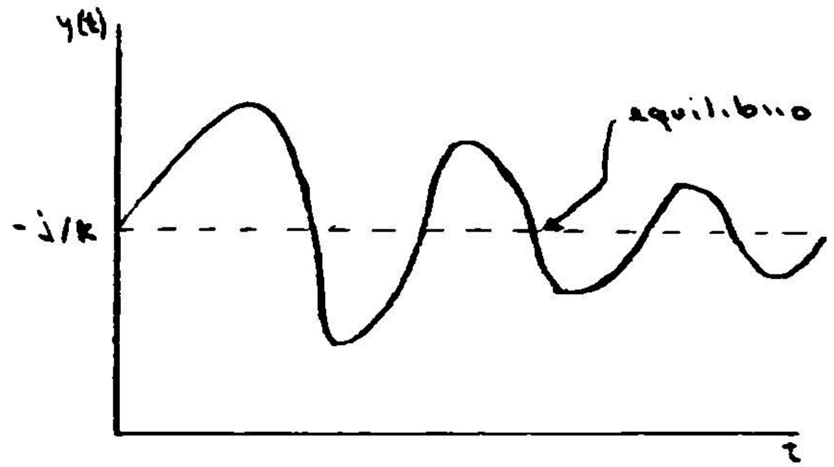

figura 1d

El cuadro 1d muestra cómo se alcanza el equilibrio en el curso de 4 años a partir de $t = 0$.

t (años)	v(t) (tasa de crecimiento)
0	0,0485
1	0,0307
2	0,0405
3	0,0382
4	0,0385

Cuadro 1d.

IV.- CONCLUSIONES

El objeto de este trabajo ha sido construir un modelo de crecimiento económico. Para ello nos hemos sevido de dos instrumentos: la teoría económica y algunos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Al construir nuestro modelo tomamos como marco de referencia el análisis que los economistas hacen del equilibrio del consumidor. En el capítulo uno vimos cómo dicho equilibrio era consecuencia de igualar la razón marginal de sustitución de un bien por otro con la pendiente de la línea de precios en cuestión. En este punto, decíamos, el consumidor asigna de la mejor manera sus recursos monetarios obteniendo la utilidad máxima.

Esta idea del equilibrio del consumidor la extendimos luego a la sociedad en su conjunto. Una sociedad con recur--

sos monetarios escasos habrá que hacer lo mismo que el consumidor individual para sacar el mejor provecho de dichos recursos escasos.

El siguiente paso fué llevar a cabo la "matematización" de estas ideas. Para ello era necesario dar una expresión matemática a los dos conceptos que jugaban el principal papel en la teoría. Así, la razón marginal de sustitución (RMS) y la pendiente de la línea de precios (PLP) vinieron a ser las ecuaciones básicas del modelo. A partir de ellas se construyó la estructura básica del modelo la cual, luego de varias manipulaciones algebraicas, nos condujo a una ecuación diferencial cuya solución vino a ser la trayectoria del producto a través del tiempo.

Podríamos plantear el problema de si un modelo de esta naturaleza puede sernos útil en relación a la teoría económica. -

Podríamos cuestionar, por ejemplo, si a partir de este modelo se pueden sacar conclusiones que pudieran extender o modificar el análisis del equilibrio del consumidor. Más aún, se podría argumentar en el sentido de si este modelo pudiera sernos útil para llevar a cabo una "dinamización" de la teoría del equilibrio del consumidor.

Como se señaló en el capítulo anterior de este trabajo, la teoría económica aquí utilizada sólo nos ha servido como un marco de referencia sobre el cual construir el modelo. Hemos tenido que subordinar los conceptos económicos al método matemático. Por eso nuestras funciones RMS y PLP no son más que meras abstracciones de lo que sería el comportamiento de la velocidad de cambio de la utilidad y los precios a través del tiempo.

BIBLIOGRAFIA:

Allen R.A.D.: "Análisis matemático para economistas".

Allen R.G.D.: "Economía Matemática"

Beach E.F. : "Economic Models: An Exposition".

Boyce y Diprima: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera".

Chiang C. Alpha: "Fundamental Methods of Mathematical Economics".

Kaplan W: "Advanced Calculus".

Nielsen L. Kaj: "Ecuaciones diferenciales".

Samuelson P. "Curso de Economía Moderna".

Solon y Levenson: "Essential Price Theory"

Stonier y Hague: "Manual de Teoría Económica"