INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY
ESCUELA DE INGENIERIA

TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE CALOR Y MASA, UN EJEMPLO DE APLICACION DE LAS FUNCIONES DE GREEN

TRABAJO FINAL QUE PRESENTA EL ALUMNO

MANUEL FEDERICO RODRIGUEZ G.

EN OPCION AL TITULO DE

INGENIERO QUIMICO ADMINISTRADOR

MONTERREY, N. L. JUNIO DE 1971

148 24 1

INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

ESCUELA DE INGENIERIA

TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE CALOR Y MASA
UN EJEMPLO DE APLICACION DE LAS FUNCIONES DE GREEN

TRABAJO FINAL QUE PRESENTA EL ALUMNO

MANUEL FEDERICO RODRIGUEZ GONZALEZ

EN OPCION AL TITULO DE

INGENIERO QUIMICO ADMINISTRADOR

MONTERREY, N. L. Junio de 1971

A MIS PADRES

A MIS MAESTROS

A MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS

INDICE

INTRODUCCION	1
TEORIA	2
ENUNCIADO DEL PROBLEMA	6
MODELO MATEMATICO	7
OBTENCION DEL PERFIL DE CONCENTRACIONES	8
OBTENCION DEL PERFIL DE TEMPERATURAS	13
CONCLUSIONES	22
APENDICE I	24
APENDICE II	28
NOMENCLATURA	32
BIBLIOGRAFIA	33

INTRODUCCION

En el presente trabajo se pretende ilustrar el empleo de la función de Green como un medio auxiliar para la obtención analítica de la solución a ecuaciones parciales diferenciales no homogeneas.

El sistema que se analiza trata sobre la difusión, en estado inestable, de un gas a través de un líquido que lo absorbe de acuerdo a una reacción química de primer orden.

A manera de comparación y con el objeto de hacer notar aquellos casos para los cuales la función de Green tiene mayor utilidad se resuelve tanto la ecuación parcial diferencial homogenea que da origen al perfil de concentraciones, como la ecuación parcial diferencial no homogenea que da lugar al perfil de temperaturas; y se encuentra que es en este último caso donde la función de Green prporciona un método relativamente simple para llevar a cabo el desarrollo matemático que conduce a la solución.

TEORIA

Primeramente se intenta una explicación sencilla del concepto básico de la función de Green y en seguida se mencionan las condiciones que cumple y las propiedades que tiene, describiendose posteriormente la forma de obtenerla y el modo de emplearla.

Sea V un espacio n-dimensional.
Sea S la superficie envolvente de n-1 dimensiones.
Sea $\Theta(t,r)$ la solución a la ecuación de difusión con una fuente $\Psi(t,r)$, donde "t" es el tiempo y "r" es un vector n-dimensional excepto para las condiciones frontera de $\Theta(t,r)$ donde r tiene n-1 dimensiones.

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \nabla^2\Theta = \Psi(t,r)$$

Se podría pensar en expresar a $\Theta(t,r)$ como una "superposición" de soluciones al problema de difusión con fuentes puntuales de intensidad unitaria y cuya distribución estuviese determinada, de alguna manera, por $\Psi(t,r)$.
La función que hace posible tal expresión para $\Theta(t,r)$ se denomina "Función de Green".

La función de Green $G(t,r;t',r')$ se puede considerar como la solución a la ecuación de difusión para una fuente puntual, instantanea de fuerza unitaria liberada en $t=t'$ y $r=r'$. Sus condiciones frontera son homogeneas siempre y cuando t sea mayor que t' es decir, que la fuente ya haya sido liberada y cumple la siguiente condición inicial:

$$\lim_{t\to t'} G(t,r) = 0 \qquad r \neq r'$$

$$\lim_{t\to t'} \int_V G(t,r;t',r')\,dr' = 1 \qquad r = r'$$

G (t,r) satisface el problema homogeneo con condiciones frontera homogeneas:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \nabla^2 G \qquad \text{(A)}$$

G (t,r;t',r') satisface la adjunta* de la ecuación de difusión homogenea:

$$-\frac{\partial G}{\partial t'} = \nabla'^2 G \qquad \text{(B)}$$

La ecuación de difusión no homogenea se puede escribir en terminos de t' y r' :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t'} = \nabla'^2 \Theta + \Psi(t', r') \qquad \text{(C)}$$

multiplicando Ec.(B) por Θ y Ec.(C) por G se tiene:

$$-\Theta \frac{\partial G}{\partial t'} = \Theta \nabla'^2 G \qquad \text{(D)}$$

$$G \frac{\partial \Theta}{\partial t'} = G \nabla'^2 \Theta + G \Psi \qquad \text{(E)}$$

restando (D) de (E) se tiene:

$$\frac{\partial (G\Theta)}{\partial t'} = G \nabla'^2 \Theta - \Theta \nabla'^2 G + G \Psi \qquad \text{(F)}$$

integrando de $0 \to (t-\varepsilon)$ y sobre el espacio n-dimensional:

$$\int_0^{t-\epsilon}\int_V \frac{\partial}{\partial t'}(G\Theta)\, dt' dV' = \int_0^{t-\epsilon}\int_V \left[G \nabla'^2 \Theta - \Theta \nabla'^2 G\right] dt' dV' + \int_0^{t-\epsilon}\int_V G\Psi\, dt' dV' \qquad \text{(G)}$$

sustituyendo límites:

$$\int_V (G\Theta)\Big|_{t-\epsilon} dV' - \int_V (G\Theta)\Big|_0 dV' = \int_0^{t-\epsilon}\int_V \left[G \nabla'^2 \Theta - \Theta \nabla'^2 G\right] dt' dV' + \int_0^{t-\epsilon}\int_V G\Psi\, dt' dV' \qquad \text{(H)}$$

tomando el límite para $\varepsilon \to 0$ y aplicando la condición inicial para G:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_V G\Theta\Big|_{t-\epsilon} dV' = 1 * \Theta(t, r) = \Theta(t, r)$$

se tiene:

$$\Theta(\vec{r},t)=\int_V (G\Theta)\Big|_0 dV'+\int_0^t\int_V\left[G\nabla'^2\Theta-\Theta\nabla'^2G\right]dt'dV+\int_0^t\int_V G\Psi\,dt'dV' \qquad \text{(I)}$$

La evaluación de la función de Green que ha de sustituírse en la Ec. (I) se hace mediante una comparación entre la Ec.(I) - que queda al eliminar los términos de la no homogeneidad y la solución al problema homogeneo obtenida por un método indepen diente como bien puede ser el de separación de variables. Esta comparación es válida debido a la propiedad de la función- de Green estipulada en la Ec.(A).

* Para la obtencion de la adjunta de la cual se habla en la - Ec.(B) tengase en cuenta que para la ecuación general:

$$a_{ij}(\vec{x})\Phi_{ij}+b_i(\vec{x})\Phi_i+c(\vec{x})\Phi=\tau(\vec{x}) \qquad \Phi_i=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \qquad \Phi_{ij}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}$$

sea $\Omega(\vec{x})$ doblemente diferenciable.
Mediante la aplicación del teorema de Gauss se tiene:

$$\int_V \Omega(\vec{x})\left[a_{ij}(\vec{x})\Phi_{ij}+b_i(x)\Phi_i+c(\vec{x})\Phi(x)\right]d\sigma=\int_\Sigma \Omega(\vec{x})\left[a_{ij}(\vec{x})\Phi_j+b_i(\vec{x})\Phi(\vec{x})\right]n_i\,dS$$

$$-\int_V\left\{\Phi_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(\vec{x})\Omega(\vec{x})\right]+\Phi(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i}\left[b_i(\vec{x})\Omega(\vec{x})\right]-c(\vec{x})\Phi(x)\Omega(\vec{x})\right\}d\sigma$$

$$=\int_\Sigma\left\{\Omega(\vec{x})\left[a_{ij}(\vec{x})\Phi_j+b_i(\vec{x})\Phi(\vec{x})\right]n_i-\Phi(\vec{x})n_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(\vec{x})\Omega(\vec{x})\right]\right\}dS$$

$$+\int_V\Phi(\vec{x})\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[a_{ij}(\vec{x})\Omega(\vec{x})\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[b_i(\vec{x})\Omega(\vec{x})\right]+c(\vec{x})\Omega(\vec{x})\right\}dS$$

donde $d\tau = \prod_{i=1}^{n} dx_i$

haciendo

$$L(\Phi) = a_{ij}(\bar{x})\Phi_{ij} + b_i(\bar{x})\Phi_i + c(\bar{x})\Phi(\bar{x})$$

$$M(\Omega) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[a_{ij}(\bar{x})\Omega(\bar{x})\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[b_i(\bar{x})\Omega(\bar{x})\right] + c(\bar{x})\Omega(\bar{x})$$

se dice que $M(\Omega)=0$ es la adjunta de la ecuación general. Para que una ecuación sea su misma adjunta se debe cumplir:

$$2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i(\bar{x}) = b_i(\bar{x})$$

$$\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + c(\bar{x}) = c(\bar{x})$$

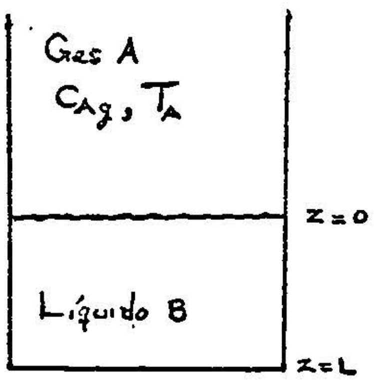
o sea

$$b_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$$

este tipo de ecuaciónes toman la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}(\bar{x})\Phi_i\right] + c(\bar{x})\Phi(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

OBTENCION DEL PERFIL DE TEMPERATURAS EN UN LIQUIDO DONDE SE DIFUNDE UN GAS A ESTADO INESTABLE CON ABSORCION POR REACCION QUIMICA DE PRIMER ORDEN.



$$A + B \longrightarrow AB$$

$$R_A = k_1 C_A$$

Condiciones Iniciales:

a) La concentración del gas A en el líquido B es cero.

$$C_A(t=0, z) = 0$$

b) La temperatura del líquido B es inicialmente T_0.

$$T(t=0, z) = T_0$$

Condiciones Frontera:

a-1) La concentración del gas A en la superficie del líquido cumple la Ley de Henry.

$$C_A(t, z=0) = C_{Ag}/m$$

a-2) El flujo de gas en el fondo del recipiente, es cero.

$$\frac{\partial C_A}{\partial z}(t, z=L) = 0$$

b-1) Se tiene pérdida de calor por convección en la superficie del líquido.

$$-k\,\frac{\partial T}{\partial z}(t, z=0) = h\left[T(t, z=0) - T_A\right]$$

b-2) El sistema está aislado en el fondo del recipiente.

$$\frac{\partial T}{\partial z}(t, z=L) = 0$$

I.- Obtención de las ecuaciones parciales diferenciales que describen el sistema.

1.- Efectuando un balance diferencial de materia:

$$N_{Az}\Big|_z S - N_{Az}\Big|_{z+\Delta z} S - k_1 C_A S\Delta z = \frac{\partial C_A}{\partial t} S\Delta z$$

dividiendo entre $S\Delta z$ y tomando el límite cuando $\Delta z \to 0$

$$-\frac{\partial N_{Az}}{\partial z} - k_1 C_A = \frac{\partial C_A}{\partial t} \qquad (1)$$

de la ley de Fick se tiene:

$$N_{A_z} = -c\,\mathcal{D}_{AB}\frac{\partial X_A}{\partial z} + X_A\left(N_{A_z} + N_{B_z} + N_{AB_z}\right)$$

dado que $X_A = \frac{C_A}{c}$ y también que $N_{B_z} = 0$, $N_{A_z} \ll 1$ y $N_{AB} \ll 1$

$$\Rightarrow \qquad N_{A_z} = -\mathcal{D}_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial z}$$

sustituyendo esta expresión en la Ec. (1):

$$\boxed{\mathcal{D}_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - k_1 C_A - \frac{\partial C_A}{\partial t} = 0} \qquad (2)$$

2.- Efectuando un balance de energía sobre un elemento diferencial:

$$q_z\Big|_z S - q_z\Big|_{z+\Delta z} S - \Delta H_R k_1 C_A S\Delta z = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} S\Delta z$$

dividiendo entre $S\Delta z$ y tomando el límite cuando $\Delta z \to 0$:

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z} - \Delta H_R k_1 C_A = \rho C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

de la Ley de Fourier de conducción de calor se tiene:

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior:

$$\boxed{k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta H_R\, k_1\, C_A(t,z)} \tag{3}$$

Para resolver la Ec. (3) es necesario conocer el perfil de concentraciones del gas en el líquido que se obtiene mediante la solución de la Ec. (2)

II.- Obtención del perfil de concentraciones.

$$\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - k_1 C_A - \frac{\partial C_A}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

La solución de la Ec. (2), aunque es una ecuación homogénea, se obtendrá aplicando el método de las funciones de Green con el objeto de hacer una comparación con su aplicación en la solución de la Ec. (3) que es una ecuación parcial diferencial no homogénea. El perfil de concentraciones está dado por la siguiente transformación:

$$C_A(t,z) = k_1 \int_0^t \xi(t') e^{-k_1 t'} dt' + \xi(t,z) e^{-k_1 t} \tag{2'}$$

donde $\xi = \xi(t,z)$ es la solución a la Ec. (2) para el caso de $k_1 = 0$, o sea:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

C.I. $\xi(t=0, z) = 0$

C.F. 1) $\xi(t, z=0) = C_{Ag}/m$

2) $\frac{\partial \xi}{\partial z}(t, z=L) = 0$

Obtención de la función $\xi(t,z)$ empleando la función de Green.

Haciendo un cambio de variable con el objeto de que la condición inicial no valga cero:

$$v_A(t,z) = \xi(t,z) - \frac{C_{Ag}}{m} \tag{4}$$

Para emplear el método de Green, considerese:

$$\frac{\partial v_A}{\partial t'} = \mathcal{D}_{AB}\,\frac{\partial^2 v_A}{\partial z'^2} \qquad (5)$$

C.I. $v_A(t=0, z) = -\frac{C_{A0}}{m}$ C.F. 1) $v_A(t', z'=0) = 0$

2) $\frac{\partial v_A}{\partial z'}(t', z'=L) = 0$

$$-\frac{\partial G}{\partial t'} = \mathcal{D}_{AB}\,\frac{\partial^2 G}{\partial z'} \qquad (6)$$

C.I. $G(t,z) = 0$ excepto en $z = z'$ y $t = t'$ donde $\lim_{t \to t'} \int_0^L G(t,z;t',z')\,dz' = 1$

C.F. 1) $G(t,z;t',z'=0) = 0$

2) $\frac{\partial G}{\partial z'}(t,z;t',z'=L) = 0$

multiplicando la Ec. (5) por G; y la Ec. (6) por v_A :

$$G\,\frac{\partial v_A}{\partial t'} = \mathcal{D}_{AB}\,G\,\frac{\partial^2 v_A}{\partial z'^2} \qquad (7)$$

$$-v_A\,\frac{\partial G}{\partial t'} = \mathcal{D}_{AB}\,v_A\,\frac{\partial^2 G}{\partial z'^2} \qquad (8)$$

Restando la Ec. (8) de la Ec. (7) y rearreglando:

$$\frac{\partial (G v_A)}{\partial t'} = \mathcal{D}_{AB}\,\frac{\partial}{\partial z'}\left(G\,\frac{\partial v_A}{\partial z'} - v_A\,\frac{\partial G}{\partial z'}\right) \qquad (9)$$

integrando la Ec. (9) de $0 \to (t-\varepsilon)$ y de $0 \to L$:

$$\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t'}(G v_A)\right] dz'\,dt' = \mathcal{D}_{AB}\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L \frac{\partial}{\partial z'}\left[G\,\frac{\partial v_A}{\partial z'} - v_A\,\frac{\partial G}{\partial z'}\right] dz'\,dt'$$

$$\Rightarrow \int_0^L (G v_A)\Big|_0^{t-\varepsilon} dz' = \mathcal{D}_{AB}\int_0^{t-\varepsilon}\left[G\,\frac{\partial v_A}{\partial z'} - v_A\,\frac{\partial G}{\partial z'}\right]_0^L dt'$$

sustituyendo límites:

$$\int_0^L G(t,z;t-\varepsilon,z')\mathcal{V}_A(t-\varepsilon,z')dz' - \int_0^L G(t,z;t'=0,z')\mathcal{V}_A(t'=0,z')dz'$$

$$=\mathcal{D}_{AB}\int_0^{t-\varepsilon}\left[G(z'=L)\frac{\partial \mathcal{V}_A}{\partial z'}(z'=L)-\mathcal{V}_A(z'=L)\frac{\partial G}{\partial z'}(z'=L)\right]dt' - \mathcal{D}_{AB}\int_0^{t-\varepsilon}\left[G(z'=0)\frac{\partial \mathcal{V}_A}{\partial z'}(z'=0)-\mathcal{V}_A(z'=0)\frac{\partial G}{\partial z'}(z'=0)\right]dt'$$

tomando $\lim\ \varepsilon\to 0$ y observando que dadas las condiciones frontera para $\mathcal{V}_A$ y para G se elimina el segundo miembro pues

C.F. $\mathcal{V}_A$ 1) $\mathcal{V}_A(t',z'=0)=0$ C.F. G 1) $G(t,z;t',z'=0)=0$

2) $\frac{\partial \mathcal{V}_A}{\partial z'}(t',z'=L)=0$ 2) $\frac{\partial G}{\partial z'}(t,z;t',z'=L)=0$

se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^L G(t,z;t-\varepsilon,z')\mathcal{V}_A(t-\varepsilon,z')dz' = \int_0^L G(t,z;t'=0,z')\mathcal{V}_A(t'=0,z')dz' \quad (10)$$

de la condición inicial para G se sabe que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^L G(t,z;t-\varepsilon,z')\,\mathcal{V}_A(t-\varepsilon,z')dz' = 1*\mathcal{V}_A(t,z)=\mathcal{V}_A(t,z)$$

de la condición inicial para $\mathcal{V}_A$ se sabe que

$$\mathcal{V}_A(t'=0,z')=-\frac{C_{Ag}}{m}$$

sustituyendo estos valores en la Ec. (10) se tiene:

$$\mathcal{V}_A(t,z) = -\frac{C_{Ag}}{m}\int_0^L G(t,z;t'=0,z')dz' \quad (11)$$

Dado que la función de Green satisface el problema homogéneo y ya que $\mathcal{V}_A(t,z)$ está descrita por una ecuación parcial diferencial homogénea con condiciones frontera homogéneas, entonces la función de Green $G(t,z;t',z')$ se obtendrá comparando la Ec. (11) con la solución al problema homogéneo para $\mathcal{V}_A(t,z)$ (que en este caso particular es el mismo que el problema original). La solución al problema homogéneo para $\mathcal{V}_A(t,z)$ se muestra a continuación en la Ec. (12) cuya obtención se llevó a cabo por el método de separa -

ción de variables y se describe en el Apéndice I. $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi$

$$v_A(t,z) = -\frac{C_{Ag}}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\left[\int_0^L sen\left(\frac{\lambda_n z'}{L}\right)dz'\right] sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t} \quad (12)$$

Comparando la Ec. (11) con la Ec. (12) se encuentra que la función de Green es:

$$G(t,z,t'=0,z') = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(sen\left(\frac{\lambda_n z'}{L}\right)\right)\left[sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t} \quad (13)$$

$$G(t,z;t',z') = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[sen\left(\frac{\lambda_n z'}{L}\right)\right]\left[sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2(t-t')} \quad (14)$$

sustituyendo la Ec. (13) en la Ec. (11) se tiene:

$$v_A(t,z) = -\frac{C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\left[\int_0^L sen\left(\frac{\lambda_n z'}{L}\right)dz'\right]sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t} \quad (15)$$

Nótese que la Ec. (15) es igual a la Ec. (12) lo cual pone en evidencia lo inecesario que resulta el emplear la función de Green en la solución de ecuaciones homogéneas y solo se ha empleado aquí con fines ilustrativos y a manera de comparación con el empleo de la función de Green en la obtención de la solución a la ecuación no homogénea que resulta del balance de energía (Ec. (3)) y que se resolverá una vez que se tenga el perfil de concentraciones.

Evaluando la integral de la Ec. (15) se tiene:

$$v_A(t,z) = \frac{2C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t}$$

sustituyendo $\xi(t,z) = v_A(t,z) + C_{Ag}/m$

$$\xi(t,z) = \frac{C_{Ag}}{m} + \frac{2C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t}$$

sustituyendo $\xi(t,z)$ en la Ec. (2'):

$$C_A(t,z) = k_1\int_0^t\left\{\frac{C_{Ag}}{m} + 2\frac{C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t'}\right\}e^{-k_1 t'}dt'$$

$$+\left\{\frac{C_{Ag}}{m} + \frac{2C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[sen\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t}\right\}e^{-k_1 t}$$

evaluando las integrales:

$$C_A(t,z)=\frac{k_1 C_{Ag}}{m}\left(-\frac{1}{k_1}e^{-k_1 t}\right)+\frac{C_{Ag}}{m}+\frac{2k_1C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left(\frac{1}{k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]\left(1-e^{-\left[k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2\right]t}\right)$$
$$+\frac{C_{Ag}}{m}e^{-k_1 t}+\frac{2C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]e^{-\left[k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2\right]t}$$

de donde se obtiene el perfil de concentraciones, es decir, la solución a la Ec. (2):

$$C_A(t,z)=\frac{C_{Ag}}{m}+\frac{2k_1C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left(\frac{1}{k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]\left[1-e^{-\left[k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2\right]t}\right]$$
$$+\frac{2C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)-1\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right]\left[e^{-\left[k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2\right]t}\right] \qquad (16)$$

donde $\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi$ para $n=1,2,3\ldots$

III.- Obtención del perfil de temperatura.

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta H_R\, k_1\, C_A(t,z) \qquad (3)$$

sujeta a:

$$\text{C.I.}\quad T(t=0,z) = T_0$$

$$\text{C.F.}\quad 1)\ -k\frac{\partial T}{\partial z}(z=0) = h\left[T(t,z=0) - T_A\right]$$

$$2)\ \frac{\partial T}{\partial z}(t,\ z=L) = 0$$

Se supondrá k_1 y m independientes de temperatura como a proximación tentativa.
Para emplear el método de Green considérese: $\Theta = T - T_A$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t'} = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z'^2} - \frac{\Delta H_R\, k_1}{\rho C_p} C_A(t',z') \qquad (17)$$

$$\text{C.I.}\quad \Theta(t'=0,\ z') = T_0 - T_A$$

$$\text{C.F.}\quad 1)\ \frac{\partial \Theta}{\partial z'}(t'\ z'=0) = -\frac{h}{k}\left[\Theta(t',z'=0)\right]$$

$$2)\ \frac{\partial T}{\partial z'}(t',z'=L) = 0$$

$$-\frac{\partial G}{\partial t'} = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2 G}{\partial z'^2} \qquad (18)$$

C.I. $G(t,z) = 0$ excepto en $z=z'$ y $t=t'$ donde $\lim_{t\to t'} \int_0^L G(t,z;t',z')\,dz' = 1$

$$\text{C.F.}\quad 1)\ \frac{\partial G}{\partial z'}(t,z;t',z'=0) = -\frac{h}{k}\left[G(t,z;t',z'=0)\right]$$

$$2)\ \frac{\partial G}{\partial z'}(t,z:t',z'=L) = 0$$

multiplicando la Ec. (17) por G y la Ec. (18) por Θ

$$G\frac{\partial \Theta}{\partial t'} = \frac{k}{\rho C_p} G\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z'^2} - \frac{\Delta H_R\, k_1}{\rho C_p} G\, C_A \qquad (19)$$

$$-\Theta \frac{\partial G}{\partial t'} = \frac{k}{\rho C_p} \Theta \frac{\partial^2 G}{\partial z'^2} \qquad (20)$$

restando la Ec. (20) de la Ec. (19) y rearreglando:

$$\frac{\partial}{\partial t'}(G\Theta) = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial}{\partial z'}\left[G\frac{\partial \Theta}{\partial z'} - \Theta\frac{\partial G}{\partial z'}\right] - \frac{\Delta H_R k_1}{\rho C_p}(G C_A) \qquad (21)$$

integrando la Ec. (21) de $0 \to t_\varepsilon$ y de $0 \to L$:

$$\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t'}(G\Theta)dz'dt' = \frac{k}{\rho C_p}\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L \frac{\partial}{\partial z'}\left[G\frac{\partial \Theta}{\partial z'} - \Theta\frac{\partial G}{\partial z'}\right]dz'dt' - \frac{\Delta H_R k_1}{\rho C_p}\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L G C_A dz'dt'$$

$$\Rightarrow \int_0^L (G\Theta)\Big|_0^{t-\varepsilon} dz' = \frac{k}{\rho C_p}\int_0^{t-\varepsilon}\left[G\frac{\partial \Theta}{\partial z'} - \Theta\frac{\partial G}{\partial z'}\right]_0^L dt' - \frac{\Delta H_R k_1}{\rho C_p}\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L (G C_A)dz'dt'$$

sustituyendo límites:

$$\int_0^L G(t,z;t-\varepsilon,z')\Theta(t-\varepsilon,z')dz' - \int_0^L G(t,z;t'=0,z')\Theta(t'=0,z')dz'$$

$$= \frac{k}{\rho C_p}\int_0^{t-\varepsilon}\left[G(z'=L)\frac{\partial \Theta}{\partial z'}(z'=L) - \Theta(z'=L)\frac{\partial G}{\partial z'}(z'=L)\right]dt' - \frac{k}{\rho C_p}\int_0^{t-\varepsilon}\left[G(z'=0)\frac{\partial \Theta}{\partial z'}(z'=0) - \Theta(z'=0)\frac{\partial G}{\partial z'}(z'=0)\right]dt'$$

$$- \frac{\Delta H_R k_1}{\rho C_p}\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L (G C_A)dz'dt'$$

tomando $\lim_{\varepsilon \to 0}$ y observando que dadas las condiciones frontera para Θ y para G se eliminan los dos primeros términos del segundo miembro pues

$$G(z'=0)\frac{\partial \Theta}{\partial z'}(z'=0) = G(z'=0)\,\Theta(z'=0)\left(-\frac{h}{k}\right) = \Theta(z'=0)\frac{\partial G}{\partial z'}(z'=0)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z'}(z'=L) = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial G}{\partial z'}(z'=L) = 0$$

se tiene:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^L G(t,z;t-\epsilon,z')\Theta(t-\epsilon,z')dz' = \int_0^L G(t,z,t'=0,z')\Theta(t'=0,z')dz' - \frac{\Delta H_R k_1}{\rho C_p}\int_0^t\int_0^L G C_A\, dt'dz' \quad (22)$$

de la condición inicial para G se sabe que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^L G(t,z;t-\epsilon,z')\Theta(t-\epsilon,z')dz' = 1\cdot\Theta(t,z) = \Theta(t,z)$$

de la condición inicial para Θ se sabe que

$$\Theta(t'=0,z') = T_o - T_A$$

sustituyendo estos valores en la Ec. (22) se tiene:

$$\Theta(t,z) = (T_o - T_A)\int_0^L G(t,z;t'=0,z')dz' - \frac{\Delta H_R k_1}{\rho C_p}\int_0^t\int_0^L (G C_A)dt'dz' \quad (23)$$

Para resolver la Ec. (23) es necesario conocer la función de Green apropiada.
La función de Green satisface el problema homogéneo:

$$\frac{\partial\Theta_H}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2\Theta_H}{\partial z^2} \quad (24)$$

sujeta a:

$$\text{C.I.}\quad \Theta_H(t=0,z) = T_o - T_A$$

$$\text{C.F.}\quad 1)\ \frac{\partial\Theta_H}{\partial z}(t,z=0) = -\frac{h}{k}\left[\Theta(t,z=0)\right]$$

$$2)\ \frac{\partial\Theta_H}{\partial z}(t,z=L) = 0$$

examinando las eliminaciones que dadas las condiciones frontera dieron lugar a la Ec. (23) y eliminando el término de la no homogeneidad se obtiene de la misma ecuación que

$$\Theta_H(t,z) = (T_o - T_A)\int_0^L G(t,z;t'=0,z')dz' \quad (25)$$

Para obtener la función de Green se compara la Ec. (25) con la solución al problema homogéneo para $\Theta_H(t,z)$ que es la Ec.(26) mostrada a continuación y que se puede ob tener por el método de separación de variables como se - describe en el Apéndice II.

$$\Theta_h = (T_0 - T_A)\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda'_n)\left(\frac{1}{L}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right)\right] e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 t} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right)\right] dz' \quad (26)$$

donde:

$$\Phi(\lambda'_n) = \left\{ \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{Nu}{\lambda'_n}\right)^2\right] + \frac{sen\, 2\lambda'_n}{4\lambda'_n}\left[1 + \left(\frac{Nu}{\lambda'_n}\right)^2\right] + \frac{Nu}{\lambda'^2_n} sen^2 \lambda'_n \right\}^{-1}$$

$y \quad \tan \lambda'_n = Nu/\lambda'_n \quad$ para $n = 1, 2, 3 \ldots \qquad Nu = hL/k$

comparando la Ec. (26) con la Ec. (25) se encuentra que:

$$G(t, z; t'=0, z') = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda'_n)\left(\frac{1}{L}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right)\right] e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 t} \quad (27)$$

y también:

$$G(t, z; t', z') = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda'_n)\left(\frac{1}{L}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right)\right] e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 (t - t')} \quad (28)$$

como $\Theta = T - T_A$ de la Ec. (23) se obtiene:

$$T(t, z) = T_A + (T_0 - T_A)\int_0^L G(t, z; t'=0, z')\, dz' - \frac{\Delta H_R k_1}{\varrho C_p}\int_0^t \int_0^L (G C_A)\, dz'\, dt' \quad (29)$$

Para encontrar $T(t,z)$ se deben de sustituir las Ecs. (26), (27) y (28) en la Ec. (29).
Se evaluará primero el segundo término de la Ec.(29) a partir del resultado obtenido en la Ec.(27):

$$(T_0 - T_A)\int_0^L G(t, z; t'=0, z')\, dz'$$

$$= (T_0 - T_A)\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda'_n)\left(\frac{1}{L}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right)\right] e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 t} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z'}{L}\right)\right] dz'$$

$$= (T_0 - T_A)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda'_n)}{\lambda'_n}\left[sen\, \lambda'_n + \frac{Nu}{\lambda'_n}(1 - \cos \lambda'_n)\right]\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n} sen\left(\frac{\lambda'_n z}{L}\right)\right] e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t}$$

haciendo:

$$\Omega = \Omega(\lambda_n') = \Phi(\lambda_n')\left[\operatorname{sen}\lambda_n' + \frac{Nu}{\lambda_n'}\left(1-\cos\lambda_n'\right)\right]$$

se tiene:

$$(T_0-T_A)\int_0^L G(t,z;t'=0,z')\,dz' = (T_0-T_A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega}{\lambda_n'}\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)+\frac{Nu}{\lambda_n'}\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)\right]e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t} \quad (30)$$

Para la evaluación del tercer término de la Ec.(29) se debe efectuar el producto de la Ec.(16) y la Ec.(28) para lo cual se expresará a estas dos ecuaciones como sigue:

$$C_A(t,z) = a + b\sum_{n=1}^{\infty}B_n + c\sum_{n=1}^{\infty}C_n \quad (16')$$

$$G(t,z;t',z') = \sum_{n=1}^{\infty}D_n \quad (28')$$

$$\Rightarrow G\,C_A = a\sum_{n=1}^{\infty}D_n + b\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sum_{n=1}^{\infty}B_n + c\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sum_{n=1}^{\infty}C_n$$

$$\Rightarrow G\,C_A = a\sum_{n=1}^{\infty}D_n + b\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}D_n B_{n-R} + c\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}D_n C_{n-R}$$

$$\Rightarrow \int_0^t\int_0^L G\,C_A\,dt'dz' = a\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^L D_n\,dt'dz' \quad \text{(i)}$$

$$+\, b\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^L D_n B_{n-R}\,dt'dz' \quad \text{(ii)} \qquad (31)$$

$$+\, c\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^L D_n C_{n-R}\,dt'dz' \quad \text{(iii)}$$

De la Ec.(31) se observa que el tercer término de la Ec.(29) consta a su vez de tres términos que serán denominados como (i), (ii), e (iii) respectivamente y cuya evaluación se efectúa a continuación:

Evaluación del término (i):

$$q\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^L D_n\,dt'dz'$$

$$=\frac{C_{Ag}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(\lambda_n')}{L}\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)+\frac{Nu}{\lambda_n'}\,sen\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)\right]\int_0^t\int_0^L\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z'}{L}\right)+\frac{Nu}{\lambda_n'}\,sen\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)\right]e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2(t-t')}\,dz'dt'$$

$$=\frac{C_{Ag}}{m}\,\frac{\rho C_p L^2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\lambda_n')\left(\frac{1}{\lambda_n'}\right)^3\left[sen\,\lambda_n'+\frac{Nu}{\lambda_n'}(1-\cos\lambda_n')\right]\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)+\frac{Nu}{\lambda_n'}\,sen\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)\right]\left[1-e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t}\right]$$

$$=\frac{C_{Ag}}{m}\,\frac{\rho C_p L^2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{1}{\lambda_n'}\right)^3\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)+\frac{Nu}{\lambda_n'}\,sen\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)\right]\left[1-e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t}\right] \quad (32)$$

Evaluación del término (ii):

$$b\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^L D_n\,B_{n-R}\,dt'dz'$$

$$=\frac{2k_1 C_{Ag}}{m}\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^L\frac{\Phi(\lambda_n')}{L}\left[\cos\left(\frac{\lambda' z}{L}\right)+\frac{Nu}{\lambda_n'}\,sen\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z'}{L}\right)+\frac{Nu}{\lambda_n'}\,sen\left(\frac{\lambda_n' z'}{L}\right)\right]e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2(t-t')}$$

$$*\left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right)\left(\frac{1}{k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)-1\right]\left[sen\left(\frac{\lambda_{n-R} z'}{L}\right)\left(1-e^{-\left[k_1+\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2\right]t'}\right)dt'dz'\right.$$

$$= \frac{2k_1 C_{Ag}}{m} \sum_{R=0}^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_n')}{L} \left[\cos\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right)\right] \left[e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t}\right] \left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right) \left(\frac{1}{k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2}\right) \left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - 1\right]$$

$$* \int_0^t \int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_{n-R} Z'}{L}\right) \cos\left(\frac{\lambda_n' Z'}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_{n-R} Z'}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n' Z'}{L}\right)\right] \left[e^{\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t'} - e^{-\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2\right] t'}\right] dt' dz'$$

$$= \frac{k_1 C_{Ag}}{m} \sum_{R=0}^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda_n') \left[\cos\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right)\right] \left[e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t}\right] \left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right) \left(\frac{1}{k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2}\right) \left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - 1\right]$$

$$* \left\{ \left[\frac{1}{\lambda_{n-R} - \lambda_n'} + \frac{1}{\lambda_{n-R} + \lambda_n'}\right] - \left[\frac{\cos(\lambda_{n-R} - \lambda_n')}{\lambda_{n-R} - \lambda_n'} + \frac{\cos(\lambda_{n-R} + \lambda_n')}{\lambda_{n-R} + \lambda_n'}\right] + \left[\frac{\operatorname{sen}(\lambda_{n-R} - \lambda_n')}{\lambda_{n-R} - \lambda_n'} - \frac{\operatorname{sen}(\lambda_{n-R} + \lambda_n')}{\lambda_{n-R} + \lambda_n'}\right] \right\}$$

$$* \left\{ \frac{\rho C_p}{k} \left(\frac{L}{\lambda_n'}\right)^2 \left[e^{\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right) t} - 1\right] + \frac{1}{\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2\right]} \left[e^{-\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2\right] t} - 1\right] \right\} \quad (33)$$

Evaluación del término (iii):

$$c \sum_{R=0}^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^L D_n C_{n-R}\, dt' dz'$$

$$= \frac{2C_{Ag}}{m} \sum_{R=0}^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^L \frac{\Phi(\lambda_n')}{L} \left[\cos\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right)\right] \left[\cos\left(\frac{\lambda_n' Z'}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n' Z'}{L}\right)\right] e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 (t - t')}$$

$$* \left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right) \left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - 1\right] \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_{n-R} Z'}{L}\right)\right] \left[e^{-\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2\right] t'}\right] dt' dz'$$

$$= \frac{2C_{Ag}}{m} \sum_{R=0}^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_n')}{L} \left[\cos\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} sen\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right)\right]\left[e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t}\right]\left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - 1\right]$$

$$* \int_0^t \int_0^L \left[sen\left(\frac{\lambda_{n-R} Z'}{L}\right)\cos\left(\frac{\lambda_n' Z'}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} sen\left(\frac{\lambda_{n-R} Z'}{L}\right) sen\left(\frac{\lambda_n' Z'}{L}\right)\right]\left[e^{-\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2\right] t'}\right] dt' dz'$$

$$= \frac{C_{Ag}}{m} \sum_{R=0}^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda_n')\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda_n'} sen\left(\frac{\lambda_n' Z}{L}\right)\right]\left[e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t}\right]\left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - 1\right]$$

$$* \left\{\left[\frac{1}{\lambda_{n-R} - \lambda_n'} + \frac{1}{\lambda_{n-R} + \lambda_n'}\right] - \left[\frac{\cos(\lambda_{n-R} - \lambda_n')}{\lambda_{n-R} - \lambda_n'} + \frac{\cos(\lambda_{n-R} + \lambda_n')}{\lambda_{n-R} + \lambda_n'}\right] + \left[\frac{sen(\lambda_{n-R} - \lambda_n')}{\lambda_{n-R} - \lambda_n'} - \frac{sen(\lambda_{n-R} + \lambda_n')}{\lambda_{n-R} + \lambda_n'}\right]\right\}$$

$$* \left\{\frac{1}{\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2\right]}\left[1 - e^{-\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2\right] t}\right]\right\} \qquad (34)$$

Sustituyendo las Ecs. (32),(33) y (34) en la Ec. (31); y sustituyendo ésta y la Ec.(30) en la Ec. (29) se tiene la solución final para el perfil de temperaturas, es decir, se tiene la solución a la Ec.(3).

Efectuando las sustituciones arriba indicadas, se obtiene la ecuación para el perfil de temperaturas que se muestra en la siguiente página, teniendo en cuenta que:

Los valores de λ_n están dados por: $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

Los valores de λ_n' están dados por: $\lambda_n' \tan \lambda_n' = Nu$

donde $Nu = \frac{hL}{k}$

y sabiendo también que: $\Omega = \Phi(\lambda_n')\left[sen\,\lambda_n' + \frac{Nu}{\lambda_n'}(1 - \cos\lambda_n')\right]$

y $$\Phi(\lambda_n') = \left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right)^2\right] + \frac{sen\,2\lambda_n'}{4\lambda_n'}\left[1 + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right)^2\right] + \frac{Nu}{\lambda_n'^2}\left(sen^2\lambda_n'\right)\right\}^{-1}$$

$$\underline{\underline{T(t,z)}} = T_A + (T_o - T_A)\sum_{n=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{1}{\lambda'_n}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right)\right]\left[e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 t}\right]$$

$$-\frac{\Delta H_R k_1 C_{Ag} L^2}{m\,k}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{1}{\lambda'_n}\right)^3\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right)\right]\left[1 - e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 t}\right]$$

$$-\frac{\Delta H_R k_1 C_{Ag} L^2}{m\,k}\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\lambda'_n)\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right)\right]\left[e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 t}\right]\left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right)\left(\frac{1}{k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - 1\right]$$

$$*\left\{\left[\frac{1}{\lambda_{n-R} - \lambda'_n} \quad \frac{1}{\lambda_{n-R} + \lambda'_n}\right] - \left[\frac{\cos(\lambda_{n-R} - \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} - \lambda'_n} + \frac{\cos(\lambda_{n-R} + \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} + \lambda'_n}\right] + \left[\frac{\mathrm{sen}(\lambda_{n-R} - \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} - \lambda'_n} - \frac{\mathrm{sen}(\lambda_{n-R} + \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} + \lambda'_n}\right]\right\}$$

$$*\left\{\left(\frac{1}{\lambda'_n}\right)^2\left[e^{\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)t} - 1\right] + \frac{1}{\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2\right]}\left[e^{-\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - \frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2\right]t} - 1\right]\right\}$$

$$-\frac{\Delta H_R k_1 C_{Ag}}{\varrho C_p m}\sum_{R=0}^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\lambda'_n)\left[\cos\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right) + \frac{Nu}{\lambda'_n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda'_n Z}{L}\right)\right]\left[e^{-\frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2 t}\right]\left(\frac{1}{\lambda_{n-R}}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right) - 1\right]$$

$$*\left\{\left[\frac{1}{\lambda_{n-R} - \lambda'_n} + \frac{1}{\lambda_{n-R} + \lambda'_n}\right] - \left[\frac{\cos(\lambda_{n-R} - \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} - \lambda'_n} + \frac{\cos(\lambda_{n-R} + \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} + \lambda'_n}\right] + \left[\frac{\mathrm{sen}(\lambda_{n-R} - \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} - \lambda'_n} - \frac{\mathrm{sen}(\lambda_{n-R} + \lambda'_n)}{\lambda_{n-R} + \lambda'_n}\right]\right\}$$

$$*\left\{\frac{1}{\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2\right]}\left[1 - e^{-\left[k_1 + \mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_{n-R}}{L}\right)^2 - \frac{k}{\varrho C_p}\left(\frac{\lambda'_n}{L}\right)^2\right]t}\right]\right.$$

CONCLUSIONES

* El empleo de la función de Green tiene su principal aplicación en la solución de ecuaciones parciales diferenciales no homogeneas pues proporciona un método sencillo para alcanzar la solución.
* El perfil de temperaturas obtenido está sujeto a la suposición de que tanto la constante cinética como la constante de Henry son independientes de temperatura; ésto es válido sólo como una aproximación pues se sabe que ambas constantes aumentan exponencialmente con la temperatura, sin embargo, el perfil que esta suposición proporciona puede dar una idea aproximada de la verdadera distribución de temperaturas. El considerar en una segunda aproximación las variaciones mencionadas para las constantes da lugar a ecuaciones demasiado complejas y poco prácticas para su manejo.
* Aunque el sistema descrito no es el caso de absorbedores de gas del tipo de columnas empacadas o de platos, los perfiles obtenidos tienen su aplicación en la evaluación de razones de absorción y variaciones de temperatura para los casos donde se tenga absorción con reacción química para un líquido estacionario; como se tiene en ciertos tipos de purificación de gases (absorción de CO_2 por soluciones de NaOH), contaminación o envenenamiento de líquidos estacionarios por absorción de un gas que reacciona quimicamente con éllos o con algún soluto disuelto en éllos; tiene tambien aplicación en ciertos tipos de espreado.
* Este tipo de problemas es muy complejo y generalmente requiere de mediciones experimentales, sin embargo los resultados obtenidos analíticamente permiten una visualización bastante clara del problema y proporcionan útiles aproximaciones en la predicción de resultados.

Una vez que se ha logrado obtener el perfil de temperaturas para un sistema dado es posible, inspeccionando la ecuación, conocer cierta informacion tanto cuantitativa como cualitativa a saber:

Se puede conocer la variación con respecto al tiempo, de la temperatura promedio:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^L T(t,z)\,dz}{\int_0^L dz} = \frac{1}{L}\int_0^L T(t,z)\,dz$$

Se puede conocer el flujo de calor como función del tiempo y de la profundidad pudiéndose evaluar por lo tanto el flujo para distintos puntos y diferentes tiempos:

$$q_z = -k\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

Se puede averiguar también que perfil de temperaturas se tendrá cuando el tiempo tienda a infinito. Teniendose entonces el perfil de temperaturas a estado estable.

Se puede encontrar cuáles son las propiedades físicas quemas afectan al perfil de temperaturas e inclusive se puede calcular la repercusión que tendrá el perfil de temperaturas ante un cambio determinado de una propiedad física dada o de un grupo de propiedades físicas.

De manera similar se pueden encontrar efectos que se contrarresten o bien efectos que se sumen en su influencia sobre el perfil de temperaturas.

Dado todo lo anterior está de sobra el enfatizar la importancia que, para un sistema dado, tiene el perfil de temperaturas.

APENDICE I

Obtención, mediante el método de separación de variables, de la función $v_A(t,z)$ para el problema homogeneo descrito por:

$$\frac{\partial v_A}{\partial t} = \mathcal{D}_{AB}\frac{\partial^2 v_A}{\partial z^2} \tag{a}$$

C.I. $v_A(t=0,z) = -\frac{C_{Ag}}{m}$

C.F. 1) $v_A(t, z=0) = 0$

2) $\frac{\partial v_A}{\partial z}(t, z=L) = 0$

Adimensionalización:

definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$t^* = \frac{\mathcal{D}_{AB}\, t}{L^2} \qquad \Theta = v_A \Big/ -\frac{C_{Ag}}{m} \qquad z^* = \frac{z}{L}$$

se tiene que:

$$t = \frac{L^2 t^*}{\mathcal{D}_{AB}} \qquad v_A = -\frac{C_{Ag}}{m}\Theta \qquad z = z^* L$$

de donde por sustitución en la Ec.(a) y en sus condiciones frontera se obtiene:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^{*2}} \tag{b}$$

C.I. $\Theta(t^*=0, z^*) = 1$

C.F. 1) $\Theta(t^*, z^*=0) = 0$

2) $\frac{\partial \Theta}{\partial z^*}(t^*, z^*=1) = 0$

suponiendo $\Theta = Z\,\Upsilon$

donde $\Theta = \Theta(t^*, z^*)$; $Z = Z(z^*)$; $\Upsilon = \Upsilon(t^*)$

sustituyendo el valor de θ en la Ec.(b) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial z^*}(Z\Upsilon) = \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}(Z\Upsilon)$$

$$Z\Upsilon' = Z''\Upsilon$$

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{\Upsilon'}{\Upsilon} = -\lambda^2 \qquad \text{(c)}$$

de la Ec.(c) se tiene:

$$\Upsilon' + \lambda^2\Upsilon = 0$$

$$(D + \lambda^2)\Upsilon = 0$$

$$r = -\lambda^2$$

$$\Upsilon(t^*) = C_1 e^{-\lambda^2 t^*}$$

de la Ec.(c)se tiene:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0$$

$$(D^2 + \lambda^2)Z = 0$$

$$r^2 = -\lambda^2$$

$$r = \pm\lambda i$$

$$Z(z^*) = A\cos\lambda z^* + B\,\mathrm{sen}\,\lambda z^*$$

de la C.F. 1: $\Theta(t^*, z^*=0) = 0 \quad \Rightarrow Z(z^*=0)\Upsilon = 0$

$$\Upsilon \neq 0 \;\Rightarrow\; Z(z^*=0) = 0$$

$$\Rightarrow A\cos(0) + B\,\mathrm{sen}(0) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\therefore \quad Z = B\,\mathrm{sen}\,\lambda z^*$$

de la C.F. 2: $\frac{\partial \Theta}{\partial z^*}(t^*, z=1) = 0 \quad \Rightarrow Z'(z^*=1) \nu = 0$

$$\nu \neq 0 \Rightarrow Z'(z^*=1) = 0$$

$$\Rightarrow B\lambda \cos\lambda = 0$$

$$B \neq 0 \Rightarrow \cos\lambda = 0$$

$$\therefore \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\Theta_n = C_n e^{-\lambda_n^2 t^*} B_n \operatorname{sen}\lambda_n z^*$$

$$F_n = C_n B_n$$

$$\Rightarrow \quad \Theta = \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\lambda_n^2 \theta} \operatorname{sen}\lambda_n z^*$$

de la condición inicial: $\Theta(t^*=0, z^*) = 1$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \operatorname{sen}\lambda_n z'^*$$

multiplicando ambos miembros por $\operatorname{sen}\lambda_m z'^*$ e integrando:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\lambda_m z'^* dz'^* = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_0^1 (\operatorname{sen}\lambda_n z'^*)(\operatorname{sen}\lambda_m z'^*) dz'^*$$

aplicando ortogonalidad:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\lambda_n z'^* dz'^* = F_n \int_0^1 \operatorname{sen}^2\lambda_n z'^* dz'^*$$

$$F_n = \frac{\int_0^1 \operatorname{sen}\lambda_n z'^* dz'^*}{\left[\frac{z^*}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\lambda_n z'^*}{4\lambda_n}\right]_0^1} = \frac{\int_0^1 \operatorname{sen}\lambda_n z'^* dz'^*}{\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi}{2(2n-1)\pi}}$$

$$\operatorname{sen}(2n-1)\pi = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\Rightarrow \quad F_n = 2 \int_0^1 \operatorname{sen} \lambda_n z'^* \, dz^*$$

$$\therefore \quad \Theta(t^*, z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\int_0^1 \operatorname{sen} \lambda_n z'^* \, dz'^*\right](\operatorname{sen} \lambda_n z^*)\, e^{-\lambda_n^2 t^*}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

sustituyendo las variables adimensionales por sus respectivas variables dimensionales:

$$v_A(t, z) = -\frac{C_{Ag}}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\left[\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n z'}{L}\right) dz'\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right)\right] e^{-\mathcal{D}_{AB}\left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 t} \qquad \text{(d)} \; (12)$$

APENDICE II

Obtención, mediante el método de separación de variables, de la función $\theta_H(t,z)$ para el problema homogeneo descrito por:

$$\frac{\partial \theta_H}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial z^2} \qquad \text{(a)}$$

C.I. $\theta_H(t=0, z) = T_0 - T_A$

C.F. 1) $\frac{\partial \theta_H}{\partial z}(t, z=0) = -\frac{h}{k}\left[\theta_H(t, z=0)\right]$

2) $\frac{\partial \theta_H}{\partial z}(t, z=L) = 0$

Adimensionalización:

definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$t^* = \frac{k\,t}{\rho C_p L^2} \qquad \bar{\theta} = \frac{\theta_H}{T_0 - T_A} \qquad z^* = \frac{z}{L}$$

se tiene que:

$$t = \frac{\rho C_p L^2}{k} t^* \qquad \theta_H = (T_0 - T_A)\bar{\theta} \qquad z = L z^*$$

de donde por sustitución en la Ec.(a) y en sus condiciones frontera se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^{*2}} \qquad \text{(b)}$$

C.I. $\bar{\theta}(t^*=0, z^*) = 1$

C.F. 1) $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^*}(t^*, z^*=0) = -Nu\,\bar{\theta}(t^*, z^*=0) \qquad Nu = \frac{hL}{k}$

2) $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^*}(t^*, z^*=1) = 0$

suponiendo $\bar{\theta} = Z\,\Upsilon$

donde $\bar{\theta} = \bar{\theta}(t^*, z^*)$; $Z = Z(z^*)$; $\Upsilon = \Upsilon(t^*)$

sustituyendo el valor de $\bar{\Theta}$ en la Ec.(b) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(Z\mathcal{T}) = \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}(Z\mathcal{T})$$

$$Z\mathcal{T}' = Z''\mathcal{T}$$

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}} = -\lambda'^2 \qquad \text{(c)}$$

de la Ec.(c) se tiene:

$$\mathcal{T}' + \lambda'^2\mathcal{T} = 0$$

$$(D + \lambda'^2)\mathcal{T} = 0$$

$$r = -\lambda'^2$$

$$\mathcal{T}(t^*) = c_1 e^{-\lambda'^2 t^*}$$

de la Ec.(c) se tiene:

$$Z'' + \lambda'^2 Z = 0$$

$$(D^2 + \lambda'^2)Z = 0$$

$$r^2 = -\lambda'^2$$

$$r = \pm \lambda' i$$

$$Z(z^*) = A\cos\lambda' z^* + B\,\mathrm{sen}\,\lambda' z^*$$

de la C.F. 1: $\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z^*}(t^*, z^*=0) = N_U\left[\bar{\Theta}(t^*, z^*=0)\right]$

$$\cancel{\mathcal{T}}Z'(z^*=0) = N_U\,\cancel{\mathcal{T}}Z(z^*=0)$$

$$B\lambda' = A N_U$$

$$\frac{B}{A} = \frac{N_U}{\lambda'}$$

$$B = A\frac{N_U}{\lambda'}$$

de la C.F. 2: $\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z^*}(t^*, z^*=1) = 0 \quad \Rightarrow \gamma Z'(z^*=1) = 0$

$$\gamma \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Z'(z^*=1) = 0$$

$$-A\lambda' \operatorname{sen} \lambda'(1) + B\lambda' \cos \lambda'(1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \tan \lambda'$$

$$\therefore \tan \lambda_n' = \frac{Nu}{\lambda_n'} \quad \Rightarrow \lambda_n'$$

$$\bar{\Theta}_n = C_n e^{-\lambda_n'^2 t^*}\left[A_n \cos \lambda_n' z^* + A_n Nu\left(\frac{1}{\lambda_n'}\right) \operatorname{sen} \lambda_n' z^*\right]$$

$$\bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n e^{-\lambda_n'^2 t^*}\left[\cos \lambda_n' z^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right) \operatorname{sen} \lambda_n' z^*\right]$$

de la condición inicial: $\bar{\Theta}(t^*=0, z^*) = 1$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \left[\cos \lambda_n' z^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right) \operatorname{sen} \lambda_n' z^*\right]$$

multiplicando ambos miembros por $\left[\cos \lambda_m' z'^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_m'}\right) \operatorname{sen} \lambda_m' z'^*\right]$
e integrando:

$$\int_0^1 \left[\cos \lambda_m' z'^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_m'}\right) \operatorname{sen} \lambda_m' z'^*\right] dz^* = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \left[\cos \lambda_n' z^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right) \operatorname{sen} \lambda_n' z^*\right]\left[\cos \lambda_m' z'^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_m'}\right) \operatorname{sen} \lambda_m' z'^*\right] dz$$

aplicando ortogonalidad:

$$\int_0^1 \left[\cos \lambda_n' z'^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right) \operatorname{sen} \lambda_n' z'^*\right] dz'^* = P_n \int_0^1 \left[\cos \lambda_n' z'^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right) \operatorname{sen} \lambda_n' z'^*\right] dz'$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{\int_0^1 \left[\cos \lambda_n' z'^* + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right) \operatorname{sen} \lambda_n' z'^*\right] dz'^*}{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right)^2\right] + \frac{\operatorname{sen} 2\lambda_n'}{4\lambda_n'}\left[1 - \left(\frac{Nu}{\lambda_n'}\right)^2\right] + \frac{Nu}{\lambda_n'^2} \operatorname{sen}^2 \lambda_n'}$$

Sea:

$$\Phi(\lambda_n') = \left\{ \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{N_u}{\lambda_n'}\right)^2\right] + \frac{\operatorname{sen} 2\lambda_n'}{4\lambda_n'}\left[1-\left(\frac{N_u}{\lambda_n'}\right)^2\right] + \frac{N_u}{\lambda_n'^2}\operatorname{sen}^2\lambda_n' \right\}^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda_n)\left[\int_0^1 \left[\cos\lambda_n' z'^* + \left(\frac{N_u}{\lambda_n'}\right)\operatorname{sen}\lambda_n' z'^*\right] dz'^*\right]\left[\cos\lambda_n' z^* + \left(\frac{N_u}{\lambda_n'}\right)\operatorname{sen}\lambda_n' z^*\right] e^{-\lambda_n'^2 t^*}$$

sustituyendo las variables adimensionales por sus respectivas variables dimensionales:

$$\Theta_H = (T_o - T_\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\lambda_n)\left(\frac{1}{L}\right)\left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right) + \frac{N_u}{\lambda_n'}\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n' z}{L}\right)\right] e^{-\frac{k}{\rho C_p}\left(\frac{\lambda_n'}{L}\right)^2 t}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{\lambda_n' z'}{L}\right) + \frac{N_u}{\lambda_n'}\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda' z'}{L}\right)\right] dz' \quad \text{(d)}$$

(26)

NOMENCLATURA

c = densidad molar de la solución.- grmol soln cm^{-3}
C_A = concentración del gasA en el líquido.- grmol A cm^{-3}
C_{Ag} = concentración del gas en la fase gaseosa.- grmol A cm^{-3}
$\mathcal{D}_{AB}$ = coeficiente de difusividad.- $cm^2 seg^{-1}$
h = coeficiente de transferencia de calor.- cal $cm^{-2} seg^{-1} (K)^{-1}$
k = conductividad térmica.- cal $cm^{-1} seg^{-1} (K)^{-1}$
k_1 = constante cinética para reacción de primer orden.- seg^{-1}
L = longitud existente entre el fondo y la superficie.- cm
m = constante de Henry
N_{Az} = flujo molar del gas A en dirección "z".- grmol $cm^{-2} seg^{-1}$
Nu = número de Nusselt (hL/k)
q = flujo de calor.- cal cm^{-2} seg^{-1}
R_A = velocidad de reacción del gas A.- grmol A cm^{-3} seg^{-1}
S = area transversal a la dirección del flujo de A.- cm^2
t = variable independiente tiempo.- seg
T = variable dependiente temperatura.- (K)
T_0 = temperatura inicial del líquido.- (K)
T_A = temperatura del gas A.- (K)
X_A = fracción mol del gas A en el líquido.
z = profundidad con relación a la superficie del líquido.- cm

ρ = densidad del líquido.- gr cm^{-3}
ε = número positivo muy pequeño.

BIBLIOGRAFIA

* Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, E.N. "TRANSPORT PHENOMENA", Wiley-Toppan, pp 598-599.

* Churchill, R.V. "OPERATIONAL MATHEMATICS" McGraw-Hill-Kogakusha, pp 260-264.

* Carslaw, H.S., and Jaeger, J.C. "CONDUCTION OF HEAT IN SOLIDS", Oxford Univ. Press. pp 32-33 y 406-407.

* Danckwerts, P.V., AIChE J. 1955, (1) pp 456-463.

* Danckwerts, P.V., Trans. Faraday Soc. 1950, (46) pp 300-4.

* Perry, J.H. "CHEMICAL ENGINEERS' HANDBOOK" McGraw-Hill, 4a. Ed. pp (14-13)-(14-17).

* Sherwood and Pigford, "ABSORPTION AND EXTRACTION", McGraw-Hill, pp 319-320.

* Sneddon, I.N., "ELEMENTS OF PARTIAL DIFERENTIAL EQUATIONS", McGraw-Hill, 1957, pp 167-173, 193-196, 294-298.