UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

"EL GRUPO FUNDAMENTAL Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER PARA EL DISCO"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

HECTOR OCHOA GRIMALDO

Monterrey, N. L. Diciembre 1990

T 79.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

"EL GRUPO FUNDAMENTAL Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER PARA EL DISCO"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

HECTOR OCHOA GRIMALDO

Monterrey, N. L. Diciembre 1990

A G R A D E C I M I E N T O S

La precente tesis es el resultado del trabajo de muchas personas, durante mucho tiempo. Mi gratitud esta con todos los que de alguna u otra forma han colaborado para que mis metas se realicen ahora.

Doy gracias a " ese SER tan grande al que empequeñesemos con el simple hecho de darle un nombre ".

A mis padres: Gabriel Ochoa Gonzaléz y Anice Grimaldo Montoya, ya que han sido mis más fieles amigos, mis más duros criticos y ejemplo de disiplina y trabajo. Los amo.

A mis hermanos Erix, Gabriela B. y P. Juan.

A la Lic. Silvia Gonzaléz Durán, por su apoyo incondicional, su sencilles de espiritu y su fortaleza moral. Y sobre todo por alumbrar mi camino con su " Verdad ".

A los maestros:

Lic. Pedro Emerico Rodríguez de la Paz
Lic. Rodrigo Gonzaléz Rojas.
Lic. Alfredo Alanís Durán.
Lic. Eduardo Uresti

D E D I C A T O R I A

A mis padres:

Gabriel Ochoa G.

Anice Grimaldo M.

A mis hermanos:

Erix.

Gabriela B.

P Juan.

I N D I C E

INTRODUCCION

En el transcurso de este trabajo se construira un functor entre la categoria de los espacios topologico con mapeos continuos y los grupos con homomorfismos. Este sera un functor covariante.

En la primera sección se establecen las bases para poder introducir una estructura de grupo sobre los espacios topologicos. Esta estructura se construira en base a los arcos homotopicos en el espacio en cuestión. Despues nos restringiremos a los lazos basados en un punto del espacio para poder definir el grupo fundamental.

Una vez hecho esto se darán algunos elementos de los espacios de recubrimiento, de levantamientos y de teoria de retracciones junto con sus formas de aplicación para el calculo de grupos fundamentales.

Cabe hacer notar que el grupo fundamental es un invariante topologico y esto lo hace una herramienta muy util para determinar cuando dos espacios pueden ser homeomorfos, la unica restricción que pondremos sera que los espacios sobre los cuales estemos trabajando cumplan con la arco-conexidad.

En la ultima sección aplicaremos esta teoria para dar una demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer para el disco.

HOMOTOPIA DE ARCOS

Para poder definir el Grupo Fundamental de un espacio topológico $\mathbb{X}$, debemos considerar a los arcos en $\mathbb{X}$ y una relación de equivalencia entre ellos, llamada arco-homotopia.

DEFINICION. Si f y f´ son mapeos continuos del espacio $\mathbb{X}$ en el espacio $\mathbb{Y}$, decimos que f es **homotopico** a f´ si hay un mapeo continuo $F:\mathbb{X}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{Y}$, tal que

$$F(x,0)=f(x) \quad y \quad F(x,1)= f'(x)$$

para cada $x\in\mathbb{X}$. (Aquí $\mathbb{I}=[0,1]$). Al mapeo F se le llama una **homotopia** entre f y f´. Si f es homotopico a f´, escribimos $f \cong f'$.

Podemos pensar en una homotopia como una familia continua uniparametrica de mapeos de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$. Si al parametro t lo imaginamos como el tiempo, entonces la homotopia F representara una deformación continua del mapeo f al mapeo f´, al variar t de 0 a 1.

Ahora consideraremos al caso espacial en que los mapeos son arcos en $\mathbb{X}$. Para nosotros un arco en $\mathbb{X}$ de x_0 a x_1 es un mapeo continuo $f: [0,1]\longrightarrow\mathbb{X}$ tal que $f(0)=x_0$ y $f(1)=x_1$. Así decimos que x_0 es el **punto inicial** y x_1 el **punto final** del arco f. Por conveniencia usaremos al intervalo $\mathbb{I}=[0,1]$ como el dominio de todos los arcos.

DEFINICION. Dos arcos f y f´ que mapean al intervalo $\mathbb{I}=[0,1]$ en $\mathbb{X}$ se llamaran **arco-homotopicos** si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si hay un mapeo continuo $F:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{X}$ tal que

$$F(s,0)=f(s) \quad y \quad F(s,1)=f'(s),$$
$$F(0,t)=x_0 \quad y \quad F(1,t)=x_1,$$

para cada $s\in\mathbb{I}$ y cada $t\in\mathbb{I}$. Llamamos a F una **arco-homotopia** entre f y f´. Ver figura 1. Si f es arco-homotopico a f´, escribimos $f \simeq_p f'$.

La primera condición dice simplemente que F es una homotopia entre f y f´, y la segunda dice que para cada t, el arco:

$$s \longrightarrow F(s,t)$$

es un arco de x_0 a x_1. En otras palabras, la primera condición dice que F reprecenta una manera continua de deformar el arco f al arco f´, y la segunda condición dice que los extremos del arco permanecen fijos durante la deformación.

LEMA. Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_p$ son relaciones de equivalencia.

Si f es un arco, denotaremos a su clase de equivalencia arco-homotopica por $[f]$.

Dem.: Verifiquemos las propiedades de una relación de equivalencia.

Reflexiva. Sea f un mapeo continuo del espacio $\mathbb{X}$ en el espacio $\mathbb{Y}$. Es trivial que $f \simeq f$; el mapeo $F(x,t)=f(x)$ $\forall t\in[0,1]$ es la homotopia requerida. Si f es un arco, F funciona tambien como una arco-homotopia.

Simétrica. Supongamos que $f \simeq f'$, entonces existe un mapeo continuo $F:\mathbb{X}\times\mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{Y}$, tal que:

$$F(s,0)=f(s) \quad y \quad F(s,1)=f'(s).$$

Ahora, definimos $G:\mathbb{X}\times\mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{Y}$ como:

$$G(s,t)=F(s,1-t).$$

Así, tenemos que:

$$G(s,0)=F(s,1)=f'(s) \quad y \quad G(s,1)=F(s,0)=f(s).$$

Además G es continuo, por ser la composición de dos mapeos continuos, esto es:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}\times\mathbb{I} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "i\times\phi"'] & & \mathcal{Y} \\ & & \mathcal{X}\times\mathbb{I} \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Donde: $G=F\circ(i\times\phi)$

$$i:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$$
$$x\longmapsto x$$
$$\phi:\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{I}$$
$$t\longmapsto 1-t$$

Con esto vemos que:

$$G(s,t)=\left[F\circ(i\times\phi)\right](s,t)=F\left[i\times\phi(s,t)\right]=F(s,1-t)$$

Así, G resulta ser una homotopia entre f' y f. Si F es una arco-homotopia, entonces:

$$F(0,t)=x_0 \quad y \quad F(1,t)=x_1 \ \forall\ t\in\mathbb{I},$$

y así $G(0,t)=F(0,1-t)=x_0$ y $G(1,1-t)=x_1$, por esto concluimos que G es una arco-homotopia entre f y f'.

Transitiva. Supongamos que $f\cong f'$ y $f'\cong f''$, entonces existen mapeos continuos F y F', tal que:

$$F:\mathcal{X}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{Y} \text{ con } F(x,0)=f(x),\quad F(x,1)=f'(x);$$
$$F':\mathcal{X}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{Y} \text{ con } F'(x,0)=f'(x),\ F'(x.1)=f''(x).$$

Definamos $G:\mathcal{X}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{Y}$ como sigue:

$$G(x,t)=\begin{cases} F(x,2t) & \text{si } t\in[0,{}^1/_2] \\ F'(x,2t-1) & \text{si } t\in[{}^1/_2,1] \end{cases}.$$

Observamos que G esta bien definida, pues con $t={}^1/_2$:

$$F(x,2t)=F(x,1)=f'(x)=F'(x,0)=F'(x,2t-1).$$

Afirmamos que G es continua. En efecto, las restricciónes de G a los subconjuntos cerrados $\mathcal{X}\times[0,{}^1/_2]$ y $\mathcal{X}\times[{}^1/_2,1]$ de $\mathcal{X}\times\mathbb{I}$ son continuas, siendo la unión de estos conjuntos igual a $\mathcal{X}\times\mathbb{I}$. La continuidad de G se sigue del lema de la pegadura.

Además:

$$G(x,0)=F(x,0)=f(x) \quad y \quad G(x,1)=F''(x,1)=f''(x),$$

por consiguiente, G es una homotopia de f a f'' y así $f\cong f''$.

Si F y F' son arco-homotopias, entonces:

$$F(0,t)=x_0,\quad F(1,t)=x_1 \ \forall\ t$$
$$y \quad F'(0,t)=x_0,\ F'(1,t)=x_1 \ \forall\ t.$$

Así $G(0,t)=\begin{cases} F(0,2t)=x_0 & \text{si } t\in[0,{}^1/_2] \\ F'(0,2t-1)=x_0 & \text{si } t\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$.

Por lo tanto, para $t\in[0,1]$, $G(0,t)=x_0$.

Además $G(1,t)=\begin{cases} F(1,2t)=x_1 & \text{si } t\in[0,{}^1/_2] \\ F'(1,2t-1)=x_1 & \text{si } t\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$

Y así, para cada $t\in[0,1]$, $G(1,t)=x_1$. De esto se desprende que G es una arco-homotopia entre f y f", por lo tanto $f \cong_p f''$. (Ver figura 2). □

EJEMPLO 1. Sean f y g dos mapeos cualesquiera de un espacio $\mathcal{X}$ en $\mathbb{R}^2$. El mapeo dado por:

$$F(x,t)=(1-t)f(x) + tg(x) \text{ ----- } (1)$$

es una homotopia entre f y g. (Ver figura 3). En efecto pues:

$$F(x,0)=f(x) \quad y \quad F(x,1)=g(x).$$

La homotopia dada por (1) es llamada una **homotopia de linea recta** por que mueve el punto f(x) al punto g(x) a lo largo del segmento de linea que los une.

Si f y g son arcos de x_0 a x_1, entonces F sera una arco-homotopia; esto se desprende de que:

$$F(0,t)=(1-t)f(0) + tg(0)=(1-t)x_0 + tx_0=x_0$$

$$y \quad F(1,t)=(1-t)f(1) + tg(1)=(1-t)x_1 + tx_1=x_1.$$

EJEMPLO 2. Denotemos por $\mathcal{X}$ al plano agujerado, $\mathbb{R}^2-\{0\}$ [ó $\mathbb{R}^2-0$]. Los siguientes arcos en $\mathcal{X}$,

$$f(s)=(\cos \pi s, \text{sen } \pi s),$$

$$g(s)=(\cos \pi s, 2\text{sen } \pi s)$$

son arco-homotopicos; la homotopia de linea recta entre ellos es una arco-homotopia aceptable. Pero la homotopia de linea recta entre f y el arco

$$h(s)=(\cos \pi s, -\text{sen } \pi s)$$

no es aceptable, ya que, por ejemplo,

$$F(^1/_2,^1/_2)=(1-^1/_2)f(^1/_2) + ^1/_2h(^1/_2)$$
$$=^1/_2(0,1) + ^1/_2(0,-1)=(0,0) \notin X.$$

Ahora definimos una operación sobre las clases de arco-homotopia, como sigue:

DEFINICION. Si f es un arco en X de x_0 a x_1 y g es un arco en X de x_1 a x_2, definimos la **operación** f*g de f y g como el arco h de x_0 a x_2 dado por las ecuaciones:

$$h(s)=(f*g)(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,^1/_2] \\ g(2s-1) & \text{si } s\in[^1/_2,1] \end{cases}.$$

La función h esta bien definida, pues si $s=^1/_2$ entonces

$$f(2s)=f(1)=x_1=g(0)=g(2s-1)$$

La continuidad de h se sigue del lema de la pegadura. Podemos pensar en h como el arco cuya primera mitad es el arco f y cuya segunda mitad es el arco g.

Ahora extendemos la operación * a las clases de arco-homotopia como sigue, si f y g son dos arcos en X tales que f(1)=g(0), definimos:

$$[f]*[g]=[f*g].$$

Como se puede notar la operación * solo se puede realizar cuando se cumple que f(1)=g(0), de lo contrario [f]*[g] no tendria sentido. El siguiente teorema establece las propiedades que cumple *.

TEOREMA 1.2. La operación * esta bien definida sobre las clases de arco-homotopia. Además cumple las siguientes propiedades:

(1) Asociatividad. Si [f]*([g]*[h]) esta definida, tambien lo esta ([f]*[g])*[h] y son iguales.

(2) Identidades derecha e izquierda. Dado $x\in X$, sea e_x el arco

constante $e_x: \mathbb{I} \longrightarrow \mathfrak{X}$ el cual mapea a todo el intervalo $\mathbb{I}$ en x. Si f es un arco en $\mathfrak{X}$ de x_0 a x_1, entonces

$$[f]*[e_{x_1}]=[f] \quad y \quad [e_{x_0}]*[f]=[f].$$

(3) Inverso. Dado el arco f en $\mathfrak{X}$ de x_0 a x_1, sea $\bar{f}$ el arco definido por $\bar{f}(s)=f(1-s)$. $\bar{f}$ es llamado el **regreso** de f. Entonces

$$[f]*[\bar{f}]=[e_{x_0}] \quad y \quad [\bar{f}]*[f]=[e_{x_1}].$$

Dem.: Primero debemos probar que * esta bien definida sobre las clases de homotopia, para esto supongamos que $f'\in[f]$ y $g'\in[g]$ y sean F una arco-homotopia entre f y f', y G una arco-homotopia entre g y g'. Definimos

$$H(s,t)=\begin{cases} F(2s,t) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ G(2s-1,t) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}.$$

Dado que $F(1,t)=x_1=G(0,t)$ para toda t, el mapeo H esta bien definido. La continuidad de H se sigue del lema de la pegadura. Afirmamos que H es una arco-homotopia entre f*g y f'*g', en efecto, pues:

$$H(s,0)=\begin{cases} F(2s,0) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ G(2s-1,0) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ g(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$
$$=(f*g)(s).$$

Y

$$H(s,1)=\begin{cases} F(2s,1) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ G(2s-1,1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}=\begin{cases} f'(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ g'(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$
$$=(f'*g')(s).$$

Además

$$H(0,t)= F(0,t)=x_0 \quad y \quad H(1,t)=G(1,t)=x_2 \quad \forall\, t\in\mathbb{I}.$$

Así $f*g \cong f'*g'$. (Ver figura 5). Por lo tanto, si $f'\in[f]$ y $g'\in[g]$ entonces

$$f'*g'\in[f*g], \text{ i.e., } [f'*g']=[f*g].$$

(1) Asociatividad. Supongamos que los arcos $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{X}$ cumplen:

$$f(0)=x_0, \quad f(1)=x_1=g(0), \quad g(1)=x_2=h(0), \quad y \quad h(1)=x_3.$$

Luego para verificar la asociatividad necesitamos probar que $f*(g*h) \simeq_p (f*g)*h$. Veamos primero quienes son $f*(g*h)$ y $(f*g)*h$.

$$[f*(g*h)](s)=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ (g*h)(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ (g*h)(2s-1) & \text{si } 2s-1\in[0,1] \end{cases}=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ g(2(2s-1)) & \text{si } 2s-1\in[0,{}^1/_2], \\ h(2(2s-1)-1) & \text{si } 2s-1\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

$$\text{así, } [f*(g*h)](s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ g(4s-2) & \text{si } s\in[{}^1/_2,{}^3/_4]. \\ h(4s-3) & \text{si } s\in[{}^3/_4,1] \end{cases}$$

$$[(f*g)*h](s)=\begin{cases} (f*g)(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ h(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (f*g)(2s) & \text{si } 2s\in[0,1] \\ h(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}=\begin{cases} f(2(2s)) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ g(2(2s)-1) & \text{si } 2s-1\in[0,{}^1/_2], \\ h(2s-1) & \text{si } 2s-1\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

$$\text{así, } [f*(g*h)](s) = \begin{cases} f(4s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_4] \\ g(4s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_4,{}^1/_2]. \\ h(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

Definimos la arco-homotopia F como suige: Primero mapeamos el cuadrilatero I^2 en I por el mapeo continuo ρ el cual colapsa cada uno de los tres cuadrilateros A, B y C de la figura 6 en sus bases. Al mapeo ρ lo determinamos de la siguiente manera:

Primero determinamos, en cada cuadrilatero, el rango de s para una t determinada. Así, dada $t\in[0,1]$, para el cuadrilatero A s variara de 0 al valor determinado por t en la recta l, o sea

$$0 \leq s \leq (t+1)/4;$$

para el cuadrilatero B, s varia del valor determinado por t en la recta l al valor determinado por t en la recta l', esto es

$$(t+1)/4 \leq s \leq (t+2)/4;$$

por ultimo, para el cuadrilatero C, s cambia del valor determinado por t en la recta l' a 1, así

$$(t+2)/4 \leq s \leq 1.$$

Ahora, prolongando la recta l hasta intersectar al eje y, obtenemos que el punto de intersección es (0,-1). A continuación tomemos cualquier punto (s,t) en el cuadrilatero A y sea m la recta que pasa por (s,t) y (0,-1), cuya ecuación es

$$y+1=\left[\frac{t+1}{s}\right]x.$$

Al intresectar a m con el eje x (ie). -y=0) Obtenemos que:

$$x=\frac{s}{t+1},$$

así, definimos a p en el cuadrilatero A como:

$$p(s,t)=\frac{s}{t+1} \quad \text{si } s\in\left[0,\frac{t+1}{4}\right],\ t\in[0,1].$$

Cabe notar que para los puntos sobre la recta m, con $0 \leq t \leq 1$, el valor de p es constante.

Para el cuadrilatero B, tenemos que la pendiente de la recta l es 4, ahora tomemos un punto cualquiera (s,t) en B y sea m_1 la recta de pendiente 4 y que pasa por (s,t), la cual tiene la ecuación:

$$y-t=4(x-s).$$

Ahora, para el punto (s,t) del cuadrilatero B, definimos a $p(s,t)$ como la abcisa del punto de intresección de m_1 con el eje x (ie). -y=0), o sea:

$$p(s,t)=\frac{4s-t}{4}, \quad \text{si } s\in\left[\frac{t+1}{4},\frac{t+2}{4}\right],\ t\in[0,1].$$

Aquí pasa que para cualquier punto de m_1, con $0 \leq t \leq 1$, ρ tiene el mismo valor.

Por ultimo, para definir a ρ en el cuadrilatero C, prolonguemos la recta l' hasta intersectarce con la recta $x=1$, el punto de intersección es $(1,2)$. Sea (s,t) un punto en el cuadrilatero C y designemos por m_2 a la recta que pasa por (s,t) y $(1,2)$, cuya ecuación es

$$y-2=\left[\frac{t-2}{s-1}\right](x-1).$$

La abcisa del punto de intersección de m_2 con el eje x es

$$x=\frac{2s-t}{2-t}$$

y este es el valor que le damos a $\rho(s,t)$, así:

$$\rho(s,t)=\frac{2s-t}{2-t}, \quad \text{si } s\in\left[\frac{t+2}{4},1\right],\ t\in[0,1].$$

En este caso ρ permanece constante a lo largo de la recta m_2.

En general definimos a $\rho\colon I^2 \longrightarrow I$ como

$$\rho(s,t)=\begin{cases} \frac{s}{t+1} & \text{si } s\in\left[0,\frac{t+1}{4}\right] \\ \frac{4s-t}{4} & \text{si } s\in\left[\frac{t+1}{4},\frac{t+2}{4}\right] \\ \frac{2s-t}{2-t} & \text{si } s\in\left[\frac{t+2}{4},1\right] \end{cases} \quad \text{para } t\in[0,1].$$

Una vez colapsado el cuadrado I^2 en I por ρ, componemos a este con el mapeo $(f*g)*h$. Afirmamos que esta es la arco-homotopia F que deseabamos. Más formalmente, definimos a $F\colon I\times I \longrightarrow X$ como:

$$F(s,t)=\big([(f*g)*h]\circ\rho\big)(s,t)=[(f*g)*h]\,[\rho(s,t)]$$

$$F(s,t)=\begin{cases} f\left(4\left[\frac{s}{t+1}\right]\right) & \text{si } s\in\left[0,\frac{t+1}{4}\right] \\ g\left(4\left[\frac{4s-t}{4}\right]-1\right) & \text{si } s\in\left[\frac{t+1}{4},\frac{t+2}{4}\right] \\ h\left(2\left[\frac{2s-t}{2-t}\right]-1\right) & \text{si } s\in\left[\frac{t+2}{4},1\right] \end{cases} \quad t\in[0,1].$$

$$F(s,t)=\begin{cases} f(\frac{4s}{t+1}) & \text{si } s\in[0,\frac{t+1}{4}] \\ g(4s-t-1) & \text{si } s\in[\frac{t+1}{4},\frac{t+2}{4}] \\ h(\frac{4s-t-2}{2-t}) & \text{si } s\in[\frac{t+2}{4},1] \end{cases} \quad t\in[0,1].$$

Veamos que F esta bien definida; para $s=\frac{t+1}{4}$ tenemos :

$$f\left(\frac{4s}{t+1}\right)=f\left[\frac{4\left(\frac{t+1}{4}\right)}{t+1}\right]=f(1)=x_1=g(0)=g\left[4\left(\frac{t+1}{4}\right)-t-1\right]=g(4s-t-1)$$

y para $s=\frac{t+2}{4}$ tenemos:

$$g(4s-t-1)=g\left[4\left(\frac{t+2}{4}\right)-t-1\right]=g(1)=x_2=h(0)=h\left[\frac{4\left(\frac{t+2}{4}\right)-t-2}{2-t}\right]=h\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right).$$

Las restricciónes de φ a los cuadrilateros A,B y C son continuas, como es facil ver. La continuidad de φ es consecuencia entonces del lema de la pegadura. Ahora como $f*(g*h)$ es un mapeo continuo, entonces $F=[f*(g*h)]\circ\varphi$ es un mapeo continuo.

Por ultimo chequemos que F cumple con las condiciones de una arco-homotopia. Sea t=0, entonces:

$$F(s,0)=\begin{cases} f(4s) & \text{si } s\in[0,1/4] \\ g(4s-1) & \text{si } s\in[1/4,1/2] \\ h(2s-1) & \text{si } s\in[1/2,1] \end{cases} = [(f*g)*h](s).$$

Ahora, sea t=1, entonces:

$$F(s,1)=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,1/2] \\ g(4s-2) & \text{si } s\in[1/2,3/4] \\ h(4s-3) & \text{si } s\in[3/4,1] \end{cases} = [f*(g*h)](s).$$

Además, si s=0, resulta

$$F(0,t)=f(0)=x_0 \quad \forall\ t\in[0,1],$$

y si s=1

$$F(1,t)=h(1)=x_3 \ \forall\ t\in[0,1].$$

Así concluimos que $f*(g*h) \simeq_p (f*g)*h$.

(2) Identidades. Sea $f: \mathbb{I} \longrightarrow \mathfrak{X}$ un arco tal que $f(0)=x_0$, $f(1)=x_1$ y sea $e_{x_1}: \mathbb{I} \longrightarrow \mathfrak{X}$ el arco constante que mapea a todo el intervalo $\mathbb{I}$ en x_1 esto es $e_{x_1}(s)=x_1$ $\forall$ $s \in \mathbb{I}$. Lo que necesitamos probar es que $f \cong_p f * e_{x_1}$ (Identidad derecha).

Primero veamos quien es $f*e_{x_1}$:

$$(f*e_{x_1}) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ e_{x_1}(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ x_1 & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}.$$

Ahora construimos la arco-homotopia G entre f y $f*e_{x_1}$ de la manera siguiente:

Primero mapeamos el cuadrado $\mathbb{I}^2$ en $\mathbb{I}$ por el mapeo p, el cual colapsa al cuadrilatero A de la figura 7 en su base, y colapsa al triangulo B en su vertice inferior. La definición de p es de la siguiente manera:

Prolongamos la recta l hasta intersectar al eje y $(x=0)$, obtenemos que el punto de intersección es $(0,2)$. Ahora, para un punto (s,t) en el cuadrilatero A sea m la recta que pasa por $(0,2)$ y (s,t), cuya ecuación es:

$$y-2=\left[\frac{t-2}{s}\right]x,$$

así, definimos a $p(s,t)$ como la abcisa del punto de intersección de m con el eje x $(y=0)$, esto es

$$p(s,t)=\frac{2s}{2-t}.$$

Además, en A, para cada $t\in[0,1]$, s varia desde 0 hasta el valor determinado por t en la recta l, esto es

$$0 \le s \le (2-t)/2,$$

luego, para cualquier $(s,t)\in A$ definimos

$$p(s,t)=\frac{2s}{2-t} \quad s\in\left[0,\frac{2-t}{2}\right], \quad t\in[0,1].$$

Ahora, para cualquier $(s,t)\in B$, definimos

$$p(s,t)=1 \quad s\in\left[\frac{2-t}{2},1\right], \quad t\in[0,1].$$

En general, definimos a $p: \mathbb{I}^2 \longrightarrow \mathbb{I}$ como

$$\rho(s,t)=\begin{cases}\frac{2s}{2-t} & \text{si } s\in[0,\frac{2-t}{2}]\\ 1 & \text{si } s\in[\frac{2-t}{2},1]\end{cases}\quad t\in[0,1].$$

Afirmamos que el mapeo ρ esta bien definido, en efecto, pues en $A\cap B$ $s=(2-t)/2$ y $t\in[0,1]$ y entonces:

$$\frac{2s}{2-t}=\frac{2\left(\frac{2-t}{2}\right)}{2-t}=1$$

Además,como las restricciónes de ρ a los cerrados A y B de I^2 son continuas, ρ es continuo en todo I^2, por el lema de la pegadura.

Una vez aplicado el mapeo ρ aplicamos el mapeo f. Afirmamos que el resultado es la arco-homotopia requerida. Más formalmente definimos a G de la manera siguiente:

$$G(s,t)=(f\circ\rho)(s,t)=f(\rho(s,t)$$

$$G(s,t)=\begin{cases}f\left(\frac{2s}{2-t}\right) & \text{si } s\in[0,\frac{2-t}{2}]\\ f(1)=x_1 & \text{si } s\in[\frac{2-t}{2},1]\end{cases}\quad t\in[0,1].$$

Entonces G es continuo por ser la composición de dos mapeos continuos. Ahora, si $t=0$

$$G(s,0)=f(s)\ \forall\ s\in[0,1].$$

Y si $t=1$

$$G(s,1)=\begin{cases}f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2]\\ x_1 & \text{si } s\in[{}^1/_2,1]\end{cases}=(f*e_{x_1})(s).$$

Si $s=0$, $G(0,t)=f(0)=x_0$ y si $s=1$, $G(1,t)=x_1$. Así obtenemos que

$$f\simeq_p f*e_{x_1}.$$

(Identidad izquierda). Ahora, si $e_{x_0}:I\longrightarrow X$ es el mapeo constante que manda a I en x_0, y si $\rho:I^2\longrightarrow I$ esta definido por

$$\rho(s,t)=\begin{cases}\frac{s}{1-t} & \text{si } s\in[0,\frac{1-t}{2}]\\ \frac{s+t}{t+1} & \text{si } s\in[\frac{1-t}{2},1]\end{cases}\quad t\in[0,1]$$

entonces, $G:I^2\longrightarrow X$ definido como

$$G(s,t)=[(e_{x_0}*f)\circ\rho](s,t)=(e_{x_0}*f)(\rho(s,t))$$

$$G(s,t)=\begin{cases} x_0 & \text{si } s\in[0,\frac{1-t}{2}] \\ f\left(\frac{2s+t-1}{t+1}\right) & \text{si } s\in[\frac{1-t}{2},1] \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

es una arco-homotopia entre $e_{x_0}*f$ y f.

(3) Inversos. Sea $f:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}$ un arco tal que $f(0)=x_0$ y $f(1)=x_1$ y sea $\bar{f}:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}$ el regreso de f, esto es:

$$\bar{f}(s)=f(1-s).$$

Para probar que $[f]*[\bar{f}]=[e_{x_0}]$, necesitamos demostrar que $f*\bar{f}\simeq_P e_{x_0}$. Primero veamos quien es $(f*\bar{f})(s)$.

$$(f*\bar{f})(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ \bar{f}(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ f(1-(2s-1)) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

$$(f*\bar{f})(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ f(2(1-s)) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}.$$

Ahora, tomemos a $t\in[0,1]$ y definimos al arco $\alpha_t:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}$ como aquel que empieza en x_0 y recorre a f hasta llegar a f(t), esto es:

$$\alpha_t:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}$$
$$s\longrightarrow\alpha_t(s)=f(ts)$$

aquí $0\le s\le 1$ y como $0\le t\le 1$, entonces $0\le ts\le t\le 1$, así la formula dada para α_t tiene sentido; Además α_t es continuo por ser la composición de los mapeos continuos f y $\psi:\mathbb{I}\longrightarrow[0,t]$, donde $\psi(s)=ts$.

Ahora, dado $t\in[0,1]$, veamos quien es $\alpha_t*\bar{\alpha}_t$:

$$(\alpha_t*\bar{\alpha}_t)(s)=\begin{cases} \alpha_t(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ \bar{\alpha}_t(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}=\begin{cases} \alpha_t(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ \alpha_t(2-2s) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

$$(\alpha_t*\bar{\alpha}_t)(s)=\begin{cases} f(2ts) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ f(2st(1-s)) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}.$$

Así, definimos $H(s,t)=\alpha_t*\bar{\alpha}_t(s,t)$. Aplicando el lema de la pegadura obtenemos que $H:\mathbb{I}^2\longrightarrow\mathcal{X}$ es un mapeo continuo.

Además, si t=0 $H(s,0)=f(0)=x_0=e_{x_0}(s)$; si t=1

$$H(s,1)=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ f(2(1-s)) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}=(f*\bar{f})(s).$$

Y si $s=0$, $H(0,t)=f(0)=x_0$; si $s=1$, $H(1,t)=f(0)=x_0$, por consiguiente

$$H(s,t)=\begin{cases} f(2ts) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ f(2t(1-s)) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

es una arco-homotopia entre e_{x_0} y $f*\bar{f}$, y así $f*\bar{f} \cong_p e_{x_0}$.

Para probar que $\bar{f}*f \cong_p e_{x_1}$, notemos primero que:

$$\bar{\bar{f}}(s)=\bar{f}(1-s)=f(1-(1-s))=f(s) \quad s\in[0,1]$$

Hasta aquí hemos mostrado que para cualquier arco g, $g*\bar{g} \cong_p e_x$, donde x es el punto inicial de g; así, en particular para $\bar{f}$, tenemos que:

$$\bar{f}*\bar{\bar{f}} \cong_p e_{x_1}, \quad \text{ie}).- \ \bar{f}*f \cong_p e_{x_1}. \qquad \square$$

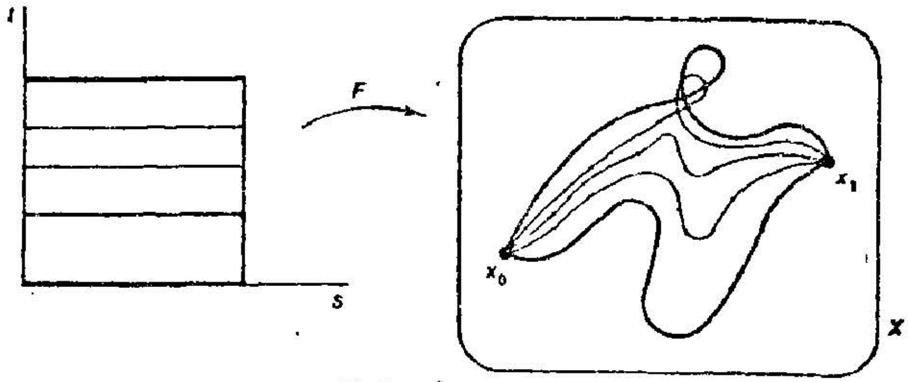


FIG 1

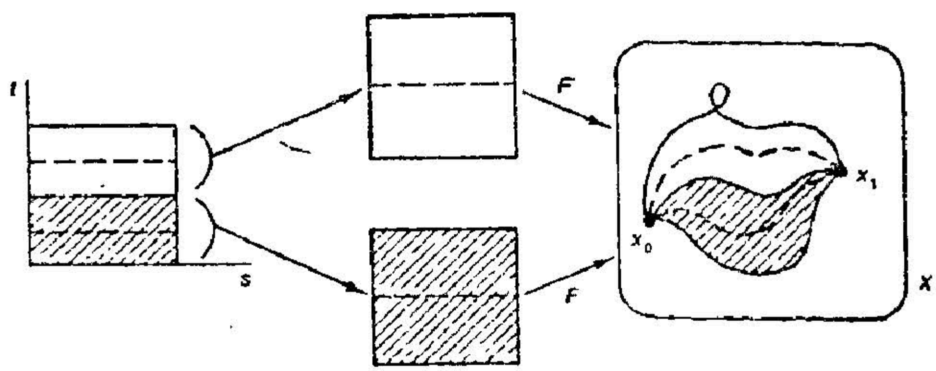


FIG. 2

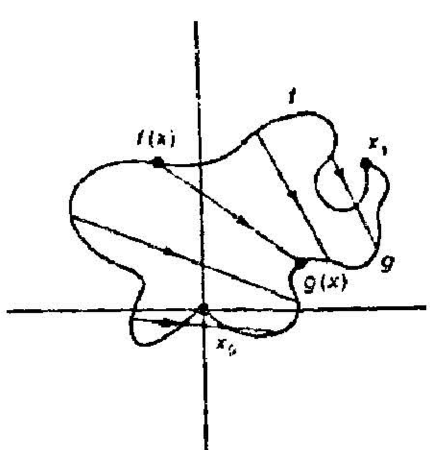


FIG. 3

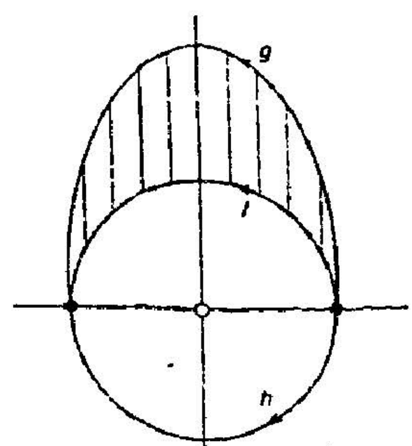


FIG 4

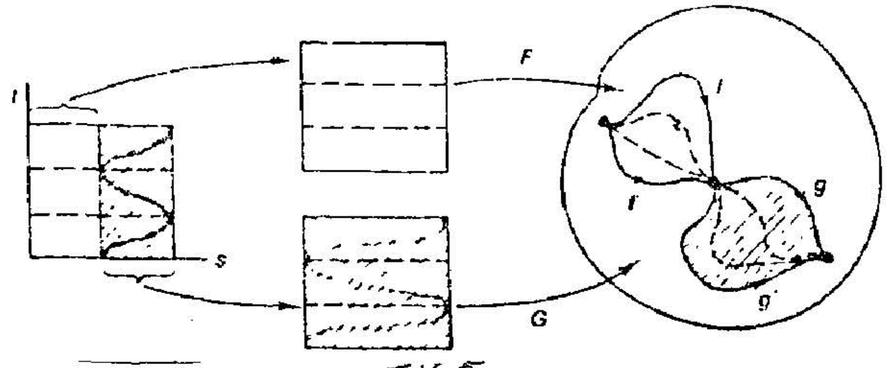


FIG 5

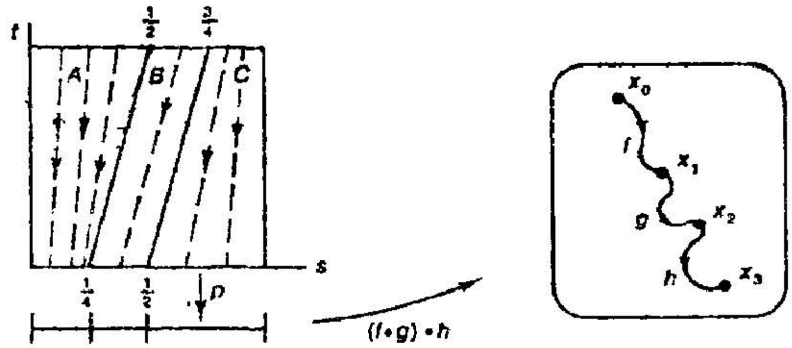


FIG 6

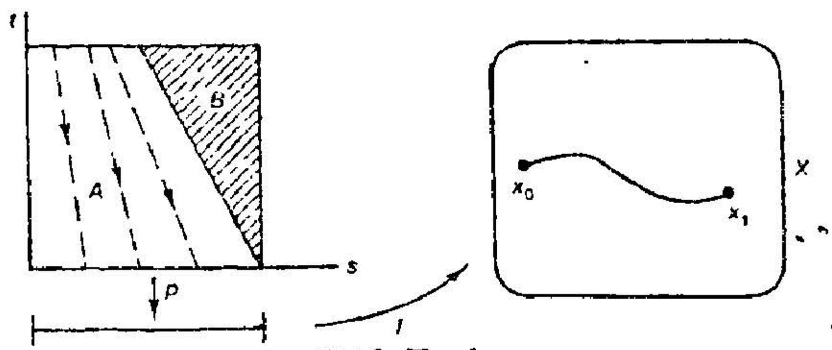


FIG. 7

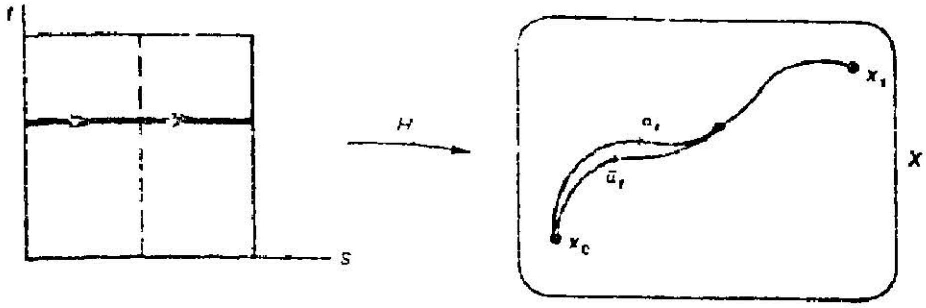


FIG 8

Como se vio en la sección anterior, el conjunto de clases de arco-homotopia de arcos en un espacio $\mathscr{X}$, no forma un grupo bajo $*$, ya que la operación $*$ definida sobre las clases no se puede realizar para cualquiera dos arcos en $\mathscr{X}$. Pero si tomamos un punto x_o en $\mathscr{X}$ que nos sirva como un **punto base** y nos restringimos a aquellos arcos que comienzan y terminan en x_o, entonces el conjunto de esas clases de arco-homotopia forman un grupo bajo $*$, el llamado **grupo fundamental** de $\mathscr{X}$ con punto base x_o. Formalizamos esto mediante la siguiente definición.

DEFINICION. Sea $\mathscr{X}$ un espacio. Sea x_o un punto de $\mathscr{X}$. Un arco en $\mathscr{X}$ que empieza y termina en x_o es llamado un **lazo** basado en x_o. El conjunto de clases de arco-homotopia de lazos basados en x_o, con la operación $*$, es llamado el **grupo fundamental** de $\mathscr{X}$ relativo al punto base x_o y se denota por $\pi_1(\mathscr{X},x_o)$.

Es obvio que, dado $x_o \in \mathscr{X}$, la operación $*$ restringida a los lazos basados en x_o siempre estara definida, pues si f y g son dos lazos en x_o, entonces $f*g$ estara definido y sera un lazo basado en x_o. Además, por el teorema anterior, el conjunto de clases de arco-homotopia de lazos basados en x_o forman un grupo bajo $*$; en efecto, para la asociatividad, si f,g y h son lazos basados en x_o entonces $f*(g*h)$ estara deinido y además $f*(g*h) \simeq_p (f*g)*h$. Para la identidad, si f es un lazo basado en x_o, entonces $f(0)=x_o=f(1)$ y así $e_{x_o}:I \longrightarrow \mathscr{X}$ es un lazo constante basado en x_o y entonces $f*e_{x_o} \simeq_p f \simeq_p e_{x_o}*f$. Para los inversoso, $\bar{f}$ es un lazo basado en x_o y $\bar{f}*f \simeq_p e_{x_o} \simeq_p f*\bar{f}$.

En esta sección probaremos varias propiedades del grupo fundamental. En particular, probaremos que el grupo fundamental es, salvo isomorfismos, independiente de la elección del punto base (con la suposición de que $\mathcal{X}$ es arco-conexo). Asimismo, probarenos que el grupo fundamental es un invariante topologico del espacio $\mathcal{X}$. Este hecho es de crucial importancia para el estudio de los problemas de homeomorfismos.

EJEMPLO 1. Sea $\mathbb{R}^n$ el n-espacio euclideano. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es el grupo trivial (el grupo que consiste solamente de la identidad). Ya que, si f es un lazo basado en x_0, la homotopia de la linea recta

$$F(s,t)=tx_0 + (1-t)f(s)$$

es una arco-homotopia entre f y el lazo constante e_{x_0}. Así, para cualquier lazo f basado en x_0, $f \simeq_p e_{x_0}$ y entonces $[f]=[e_{x_0}]$.

EJEMPLO 2. Más generalmente, si $\mathcal{X}$ es cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ es el grupo tribial. La homotopia de la linea recta nos servira una vez más, ya que por convexidad de $\mathcal{X}$ entendemos que para cualquiera dos puntos x e y de $\mathcal{X}$, el segmento de linea recta

$$\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

entre ellos esta en $\mathcal{X}$. Y así, si f es un lazo basado en x_0, entonces

$$F(s,t)=tx_0 + (1-t)f(s)$$

es una arco-homotopia entre f y e_{x_0}. En particular, la bola unitaria $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{B}^n=\{x \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$$

tiene un grupo fundamental trivial.

A continuación, veremos que tanto depende el grupo fundamental de la elección del punto base.

DEFINICION. Sea α un arco en $\mathscr{X}$ de x_0 a x_1. Definimos un mapeo

$$\hat{\alpha}: \pi_1(\mathscr{X}, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathscr{X}, x_1)$$

por la ecuación

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

El mapeo $\hat{\alpha}$ esta dibujado en la figura 9. Este mapeo esta bien definido, ya que la operación $*$ esta bien definida. Además, si f es un lazo basado en x_0, entonces $\bar{\alpha}*(f*\alpha)$ es un lazo basado en x_1, en efecto, pues

$$[\bar{\alpha}*(f*\alpha)](s) = \begin{cases} \bar{\alpha}(2s) & \text{si } s \in [0, {}^1/_2] \\ f(4s-2) & \text{si } s \in [{}^1/_2, {}^3/_4] \\ \alpha(4s-3) & \text{si } s \in [{}^3/_4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(1-2s) & \text{si } s \in [0, {}^1/_2] \\ f(4s-2) & \text{si } s \in [{}^1/_2, {}^3/_4] \\ \alpha(4s-3) & \text{si } s \in [{}^3/_4, 1] \end{cases},$$

y así $[\bar{\alpha}*(f*\alpha)](0) = \alpha(1) = x_1$ y $[\bar{\alpha}*(f*\alpha)](1) = \alpha(1) = x_1$.

Entonces $\hat{\alpha}$ mapea a $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ en $\pi_1(\mathscr{X}, x_1)$, como queriamos.

TEOREMA 2.1. El mapeo $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.

Dem.: Para mostrar que $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo, tomamos $[f]$, $[g] \in \pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ y calculamos

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]). \end{aligned}$$

Entonces $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo. (Aquí usamos las propiedades de $*$ enunciadas en el el teorema 1.2.).

Ahora calculemos $\mathit{ker}(\hat{\alpha})$

$$\begin{aligned} \mathit{ker}(\hat{\alpha}) &= \{ [f] \in \pi(\mathscr{X}, x_0) \mid \hat{\alpha}([f]) = [e_{x_0}] \} \\ &= \{ [f] \in \pi(\mathscr{X}, x_0) \mid [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] = [e_{x_1}] \} \end{aligned}$$

pero, por el teorema 1.2, tenemos que si

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] = [e_{x_1}] \\ &\rightarrow \quad ([\alpha] * [\bar{\alpha}]) * [f] * [\alpha] = [\alpha] * [e_{x_1}] \\ &\rightarrow \quad [e_{x_0}] * [f] * [\alpha] = [\alpha] \end{aligned}$$

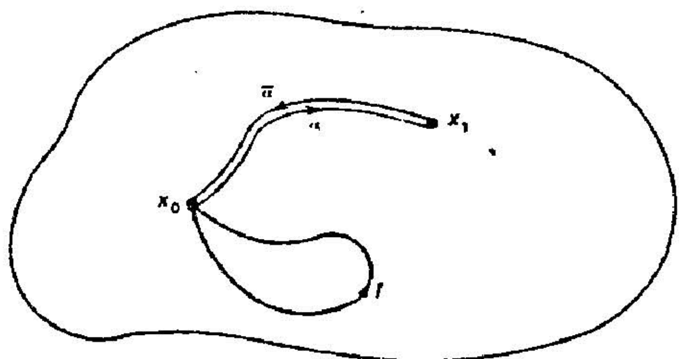


FIG 9

$$\Rightarrow \quad [f]*[\alpha]=[\alpha]$$
$$\Rightarrow \quad [f]*[\alpha]*[\overline{\alpha}]=[\alpha]*[\overline{\alpha}]$$
$$\Rightarrow \quad [f]*[e_{x_0}]=[e_{x_0}]$$
$$\Rightarrow \quad [f]=[e_{x_0}].$$

Por lo tanto $ker(\hat{\alpha})=\{[e_{x_0}]\}$ y así $\hat{\alpha}$ es inyectivo.

Ahora, si $[g]\in\pi_1(\mathcal{X},x_1)$, entonces g es un lazo en $\mathcal{X}$ basado en x_1, además podemos definir $f=\alpha*g*\overline{\alpha}$ y así f sera un lazo basado en x_0; un calculo inmediato nos muestra que $\hat{\alpha}([f])=[g]$. Entonces, para cada $[g]\in\pi_1(\mathcal{X},x_1)$ existe un $[f]\in\pi_1(\mathcal{X},x_0)$, tal que $\hat{\alpha}([f])=[g]$, por consiguiente $\hat{\alpha}$ es suprayectivo.

Por lo expuesto concluimos que $\hat{\alpha}:\pi_1(\mathcal{X},x_0)\longrightarrow\pi_1(\mathcal{X},x_1)$ es un isomorfismo de grupos. □

COROLARIO 2.2. Si $\mathcal{X}$ es un espacio arco-conexo y x_0 y x_1 son dos puntos de $\mathcal{X}$, entonces $\pi_1(\mathcal{X},x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathcal{X},x_1)$.

Dem. Sean $x_0,x_1\in\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es arco-conexo, existe un arco $\alpha:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ de x_0 a x_1. Consideremos a $\pi_1(\mathcal{X},x_0)$ y $\pi_1(\mathcal{X},x_1)$, y definamos entre ellos el mapeo

$$\hat{\alpha}:\pi_1(\mathcal{X},x_0)\longrightarrow\pi_1(\mathcal{X},x_1)$$
$$[f]\longmapsto[\overline{\alpha}]*[f]*[\alpha]$$

por el teorema 2.1 $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos y así $\pi_1(\mathcal{X},x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathcal{X},x_1)$. □

Supongamos que $\mathcal{X}$ es un espacio topologico. Sea C la arco-componente de $\mathcal{X}$ que contiene a x_0. Es facil ver que $\pi_1(C,x_0)=\pi_1(\mathcal{X},x_0)$, dado que todos los lazos y homotopias en $\mathcal{X}$ que estan basados en x_0 deben estar en el subespacio C. Así $\pi_1(\mathcal{X},x_0)$ depende solo de la arco-componente de $\mathcal{X}$ que contiene a x_0, y no nos da información alguna acerca del resto de $\mathcal{X}$. Por esta razón es usual trabajar solo con espacios arco-conexos cuando estudiamos el grupo fundamental.

Si $\mathscr{X}$ es arco-conexo, todos los grupos $\pi_1(\mathscr{X},x)$ son isomorfos, así podemos "identificar" a todos estos grupos entre si, y hablar del grupo fundamental del espacio $\mathscr{X}$, sin referirnos al punto base. Pero suprimir el punto base podria acarrear errores, ya que puede no haber manera natural de identificar $\pi_1(\mathscr{X},x_0)$ con $\pi_1(\mathscr{X},x_1)$, pues diferentes arcos α y β de x_0 a x_1 pueden producir diferentes isomorfismos entre estos grupos.

DEFINICION. Un espacio $\mathscr{X}$ se llama **simplemente conexo** si es un espacio arco-conexo y si $\pi_1(\mathscr{X},x_0)$ es el grupo trivial (de un elemento) para algun $x_0 \in \mathscr{X}$, y por consiguiente para cualquier $x_0 \in \mathscr{X}$.

LEMA. En cualquier espacio simplemente conexo $\mathscr{X}$, Cualquiera dos arcos que tienen los mismos extremos son arco-homotopicos.

Dem.: Sean f y g dos arcos en $\mathscr{X}$ de x_0 a x_1. Entonces $f*\bar{g}$ es un lazo en $\mathscr{X}$ basado en x_0. Dado que $\mathscr{X}$ es simplemente conexo $f*\bar{g} \simeq_p e_{x_0}$. Aplicando las propiedades de $*$, vemos que:

$$[(f*\bar{g})*g]=[e_{x_0}*g]=[g],$$

pero

$$[(f*\bar{g})*g]=[f*(g*\bar{g})]=[f*e_{x_1}]=[f].$$

Así, f y g son arco-homotopicos.

Intuitivamente se observa que el grupo fundamental es un invariante topologico. Para comprobar esto introducimos la noción del "homomorfismo inducido por un mapeo continuo"

Supongamos que $h:\mathscr{X}\longrightarrow\mathscr{Y}$ es un mapeo continuo que manda el punto x_0 de X al punto y_0 de $\mathscr{Y}$. Este hecho se acostumbra denotar de la siguiente manera:

$$h:(\mathscr{X},x_0)\longrightarrow(\mathscr{Y},y_0).$$

Si f es un lazo en $\mathscr{X}$ basado en x_o, entonces la composición $h\circ f:\mathbb{I}\longrightarrow\mathscr{Y}$ es un lazo en $\mathscr{Y}$ basado en y_o; en efecto, pues como h y f son continuos, entonces $h\circ f$ es continuo; además $(h\circ f)(0)=h(f(0))=h(x_o)=y_o=h(f(1))=(h\circ f)(1)$, entonces $h\circ f$ es un lazo basado en y_o. La correspondencia $f\longrightarrow h\circ f$ genera un mapeo que envia a $\pi_1(\mathscr{X},x_o)$ en $\pi_1(\mathscr{Y},y_o)$. Ahora damos una definición formal de esto:

DEFINICION. Sea $h:(\mathscr{X},x_o)\longrightarrow(\mathscr{Y},y_o)$ un mapeo continuo. Definimos $h_*:\pi_1(\mathscr{X},x_o)\longrightarrow\pi_1(\mathscr{Y},y_o)$ mediante la ecuación

$$h_*([f])=[h\circ f].$$

El mapeo h_* es llamado el **homomorfismo inducido** por h, relativo al punto base x_o.

Veamos que h esta bien definida. Sean f y f' dos lazos en $\mathscr{X}$ basados en x_o, arco-homotopicos. Si $F:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathscr{X}$ es una arco-homotopia entre ellos, entonces $h\circ F:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathscr{Y}$ es una arco-homotopia entre los lazos $h\circ f$ y $h\circ f'$; en efecto, pues $h\circ F$ es continuo ya que h y F lo son, además

$$(h\circ F)(s,0)=h(F(s,0))=h(f(s))=(h\circ f)(s)$$
$$(h\circ F)(s,1)=h(F(s,1))=h(f'(s))=(h\circ f')(s).$$

Y $$(h\circ F)(0,t)=h(F(0,t))=h(x_o)=y_o$$
$$(h\circ F)(1,t)=h(F(s,t))=h(x_o)=y_o.$$

Por lo tanto h_* esta bien definida.

Ahora, veamos que h_* es un homomorfismo. Primero tenemos que:

$$(f*g)(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ g(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases},$$

entonces

$$[h\circ(f*g)](s)=h((f*g)(s))=\begin{cases} h(f(2s)) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ h(g(2s-1)) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}$$

$$=\begin{cases}(h\circ f)(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1\!/\!_2]\\ (h\circ g)(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1\!/\!_2,1]\end{cases}$$
$$=[(h\circ f)*(h\circ g)](s).$$

Así $h\circ(f*g)=(h\circ f)*(h\circ g)$, esto implica que

$$h_*([f]*[g])=[h\circ(f*g)]=[(h\circ f)*(h\circ g)]=[h\circ f]*[h\circ g]$$
$$=h_*([f])*h_*([g])$$

por consiguiente h_* es un homomorfismo.

El homomorfismo inducido h_* no depende solo del mapeo $h\colon \mathscr{X}\longrightarrow \mathscr{Y}$ sino tambien de la elección del punto base x_0. (Una vez que x_0 se escoge, y_0 queda determinada por h.).

El homomorfismo inducido tiene dos propiedades que son cruciales en las aplicaciones. Son llamadas la "propiedades functoriales" del homomorfismo inducido, y se demuestran en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.4. Si $h\colon(\mathscr{X},x_0)\longrightarrow(\mathscr{Y},y_0)$ y $k\colon(\mathscr{Y},y_0)\longrightarrow(\mathscr{Z},z_0)$ son mapeos continuos, entonces $(k\circ h)_*=k_*\circ h_*$. Si $i\colon(\mathscr{X},x_0)\longrightarrow(\mathscr{X},x_0)$ es el mapeo identidad, entonces i_* es el homomorfismo identidad.

Dem.: Tenemos, por definición:

$$(k\circ h)_*([f])=[(k\circ h)\circ f],$$
$$(k_*\circ h_*)([f])=k_*(h_*([f]))=k_*([h\circ f])$$
$$=[k\circ(h\circ f)].$$

Entonces $(k\circ h)_*=k_*\circ h_*$.

De igual modo, $i_*([f])=[i\circ f]=[f]$; entonces i_* es el homomorfismo identidad. □

COROLARIO 2.5. Si $h\colon(\mathscr{X},x_0)\longrightarrow(\mathscr{Y},y_0)$ es un homeomorfismo de $\mathscr{X}$ en $\mathscr{Y}$, entonces h_* es un isomorfismo de $\pi_1(\mathscr{X},x_0)$ con $\pi_1(\mathscr{Y},y_0)$.

Dem.: Como $h\colon(\mathscr{X},x_0)\longrightarrow(\mathscr{Y},y_0)$ es un homeomorfismo de $\mathscr{X}$ en $\mathscr{Y}$, tenemos que:

$$h_* \circ h^{-1}{}_* = (h \circ h^{-1})_*$$

es el homomorfismo identidad en $\pi_1(\mathscr{Y}, y_0)$, y

$$h^{-1}{}_* \circ h_* = (h^{-1} \circ h)_*$$

es el homomorfismo identidad en $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$; por lo tanto h_* es un isomorfismo de $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ en $\pi_1(\mathscr{Y}, y_0)$, siendo $h_*{}^{-1} = (h^{-1})_*$. $\square$

ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO

Hasta ahora no hemos calculado un grupo fundamental no-trivial. Solucionaremos esto en la siguiente sección, donde calcularemos el grupo fundamental del circulo S^1. Para lograr esto nesecitamos estudiar a los espacios de recubrimiento. Para nosotros, los espacios de recubrimiento nos serviran como una herramienta para el calculo de grupos fundamentales, pero tambien son importantes por si mismos, sobre todo en el estudio de superficies de Riemann y variedades complejas.

DEFINICION. Sea $p: E \longrightarrow B$ un mapeo suprayectivo y continuo. Se dice que el conjunto abierto U de B esta **uniformemente recubierto** por p si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ puede escribirse como la unión de conjuntos abiertos disjuntos V_α en E tal que para cada α, la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α con U. La colección $\{V_\alpha\}$ se llamara una partición de $p^{-1}(U)$ en **secciones**.

DEFINICION. Sea $p: E \longrightarrow B$ continuo y suprayectivo. Si cualquier punto b de B tiene una vecindad U que esta uniformemente recubierta por p, entonces p se llama un **mapeo de recubrimiento** y E se llama un **espacio de recubrimiento** de B.

Note que si $p: E \longrightarrow B$ es un mapeo de recubrimiento, entonces para cada $b \in B$ el subconjunto $p^{-1}(b)$ de E necesariamente tiene la topologia discreta. En efecto, pues cada una de las secciones V_α es abierta en E e intersecta al conjunto $p^{-1}(b)$ en un solo punto, ya que $p|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo; por lo tanto este punto es abiero en $p^{-1}(b)$.

Si U es un conjunto que esta uniformemente recubierto por p, amenudo dibujamos al conjunto $p^{-1}(U)$ como una "pila de buñelos", cada uno de ellos con el mismo tamaño y forma de U, flotando en el aire sobre U; el mapeo los aplasta en U. Ver figura 10.

EJEMPLO 1. Sea $\mathscr{X}$ cualquier espacio; sea $i:\mathscr{X}\longrightarrow\mathscr{X}$ el mapeo identidad. Entonces i es un mapeo de recubrimiento (de la clase más trivial). En efecto, pues si $x\in\mathscr{X}$, entonces tomamos al abierto $U=\mathscr{X}$ y así $i^{-1}(\mathscr{X})=\mathscr{X}$, obteniendo con esto que el conjunto de secciones solo esta formado por $\mathscr{X}$, además es obvio que $i:\mathscr{X}\longrightarrow\mathscr{X}$ es un homeomorfismo.

Más generalmente, sea E el espacio $\mathscr{X}\times\{1, \ldots, n\}$ el cual consiste de n copias de $\mathscr{X}$. El mapeo $p:E\longrightarrow\mathscr{X}$ dado por $p(x,i)=x$ para toda i es otra vez un mapeo de recubrimiento (muy trivial). Verifiquemos esto; sea $x\in\mathscr{X}$ y tomemos al abierto $U=\mathscr{X}$, entonces

$$p^{-1}(\mathscr{X})=\mathscr{X}\times\{1, \ldots, n\}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{X}\times\{i\}.$$

Es obvio que $\mathscr{X}\times\{i\}$ es abierto en E para toda i y que $(\mathscr{X}\times\{i\})\cap(\mathscr{X}\times\{j\})=\emptyset$ si $i\neq j$; además $p|_{\mathscr{X}\times\{i\}}$ resulta ser un homeomorfismo. Por lo tanto p es un mapeo de recubrimiento.

TEOREMA 3.1. El mapeo $p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{S}^1$ dado por la ecuación

$$p(x)=(\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x)$$

es un mapeo de recubrimiento.

Uno puede representar a p como una función que enrolla la linea recta $\mathbb{R}$ alrededor del circulo $\mathbb{S}^1$, y en el proceso mapea a cado uno de los intervalos $[n,n+1]$ en $\mathbb{S}^1$.

Dem.: El hecho de que p es un mapeo de recubrimiento viene de las propiedades elementales de las funciones seno y coseno. Considere, por ejemplo, el subconjunto U de $\mathbb{S}^1$ el cual consiste de aquellos puntos que tienen la primera coordenada positiva. El conjunto $p^{-1}(U)$ esta formado por aquellos puntos x para los cuales $\cos 2\pi x$ es positivo; o sea, la unión de los intervalos

$$V_n=(n-{}^1/_4,\ n+{}^1/_4)$$

para toda $n\in\mathbb{Z}$. Ver figura 11.

Ahora, restringido a cualquier intervalo $\overline{V}_n$, el mapeo p es inyectivo, porque sen $2\pi x$ es estrictamente creciente ahí. (Dado que cos $2\pi x$ es positivo.). Más aun, p manda a $\overline{V}_n$ suprayectivamente en $\overline{U}$; en efecto, pues para cada $(x,y)\in\overline{U}$ concideramos $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ tal que

$$(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\ \theta)=(x,y).$$

Luego $n+\theta/2\pi\in V_n$ y $p(n+\theta/2\pi)=(x,y)$. Como $\overline{V}_n$ es compacto y $\overline{U}$ es Hausdorff, $p|_{\overline{V}_n}$ es un homeomorfismo de $\overline{V}_n$ con $\overline{U}$. En particular $p|_{V_n}$ es un homeomorfismo de V_n con U.

Argumentos similares pueden aplicarse a la interseccón de S^1 con los semiplanos abiertos superior e inferior, y con el semiplano abierto izquierdo. Estos conjuntos abiertos cubren a S^1 y cada uno de ellos esta uniformemente recubierto por p. Entonces $p:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$ es un mapeo de recubrimiento. □

PROPOCICION. Si $p:E\longrightarrow B$ y $p':E'\longrightarrow B'$ son mapeos de recubrimiento, entonces $p\times p':E\times E'\longrightarrow B\times B'$ es un mapeo de recubrimiento.

Dem.: Sean $p:E\longrightarrow B$ y $p':E'\longrightarrow B'$ mapeos de recubrimiento. Entonces $p\times p':E\times E'\longrightarrow B\times B'$ es un mapeo continuo y suprayectivo.

Sea $(b,b')\in B\times B'$, entonces $b\in B$ y $b'\in B'$. Luego, existe una vecindad U en B tal que U esta uniformemente recubierta por p; esto es, $p^{-1}(U)=\bigcup_\alpha V_\alpha$ donde los V_α son abiertos disjuntos en E y $p|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo de V_α con U. Además, para b' existe una vecindad U' en B' tal que U' esta uniformemente recubierta por p'; esto es, $p'^{-1}(U')=\bigcup_\infty V'_\infty$ donde los V'_∞ son abiertos disjunto en E' y $p'|_{V'_\omega}$ es un homeomorfismo de V'_ω con U'.

Afirmamos que $U\times U'$ es una vecindad de (b,b') que esta uniformemente recubierta por $p\times p'$; en efecto, primero:

$$\begin{aligned}(p\times p')^{-1}(U\times U') &= \{(x,y)\in E\times E' \mid (p\times p')(x,y)\in U\times U'\}\\ &= \{(x,y)\in E\times E' \mid p(x)\in U \text{ y } p'(y)\in U'\}\\ &= p^{-1}(U)\times p'^{-1}(U')\\ &= (\cup_\alpha V_\alpha)\times(\cup_\omega V'_\omega)\\ &= \{(x,y)\in E\times E' \mid x\in\cup_\alpha V_\alpha \text{ y } y\in\cup_\omega V'_\omega\}\\ &= \{(x,y)\in E\times E' \mid x\in V_\alpha \text{ y } y\in V'_\omega \\ &\qquad\qquad \text{para algun } \alpha \text{ y } \omega\}\\ &= \{(x,y)\in E\times E' \mid (x,y)\in V_\alpha\times V'_\omega \\ &\qquad\qquad \text{para algun } (\alpha,\omega)\}\\ &= \bigcup_{\alpha,\omega}(V_\alpha\times V'_\omega).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(p\times p')^{-1}(U\times U')=\bigcup_{\alpha,\omega}(V_\alpha\times V'_\omega).$$

Además, como $V_\alpha\cap V_{\alpha_1}=\emptyset=V'_{\omega_1}\cap V'_{\omega_1}$, para $\alpha\neq\alpha_1$ y $\omega\neq\omega_1$ entonces

$$(V_\alpha\times V'_\omega)\cap(V'_{\alpha_1}\times V'_{\omega_1})=\emptyset \quad \text{para } (\alpha,\omega)\neq(\alpha_1,\omega_1).$$

Así $(p\times p')^{-1}(U\times U')$ se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos disjuntos en $E\times E'$. Ahora, para cada α y ω tenemos que

$$p|_{V_\alpha} \text{ es un homeomorfismo de } V_\alpha \text{ con } U$$

$$\text{y } p'|_{V'_\omega} \text{ es un homeomorfismo de } V'_\omega \text{ con } U',$$

entonces $p|_{V_\alpha}\times p'|_{V'_\omega}$ es un homeomorfismo de $V_\alpha\times V'_\omega$ con $U\times U'$. Un calculo rapido nos muestra que:

$$p|_{V_\alpha}\times p'|_{V'_\omega}=p\times p'|_{V_\alpha\times V'_\omega}.$$

Con todo lo anterior concluimos que $p\times p':E\times E'\longrightarrow B\times B'$ es un mapeo de recubrimiento. □

EJEMPLO 2. Considere el espacio $\mathbb{T}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$; este espacio es llamado **el toro**. Por lo tanto,como se muestra en la figura 12, el producto

$$p\times p: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow S^1\times S^1$$

es un recubrimiento del toro por el plano $\mathbb{R}^2$, donde p denota al mapeo de recubrimiento de teorema 3.1. Cada uno de los cuadrados $[n,n+1]\times[m,m+1]$ se envuel~~b~~e mediante $p\times p$ por completo alrededor del toro.

En la figura no hemos dibujado al toro como el producto $S^1\times S^1$, el cual es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y por esto dificil de visualizar, sino como la superficie con forma de dona D en $\mathbb{R}^3$ obtenida por la rotación del circulo C_1 en el plano xz de radio $^1/_9$ con centro en $(1,0,0)$ alrededor del aje z. No es dificil ver que $S^1\times S^1$ es homeomorfo a la superficie D. Sea C_2 el circulo de radio 1 en el plano xy centrado en el origen. Entonces mapeamos $C_1\times C_2$ en D definiendo $f(a\times b)$ como el punto al cual se manda a cuando se rota al circulo C_1 al rededor del eje z hasta que su centro coincida con el punto b. Ver figura 13. Formalmente definimos

$$f: C_1\times C_2 \longrightarrow D$$

como $f((w,x)\times(y,z))=(wy,wz,x)$, donde $(w,x)\in C_1$ y $(y,z)\in C_2$. Por la construcción de f es claro que $f((w,x)\times(y,z))\in D$ si $(w,x)\in C_1$ y $(y,z)\in C_2$. f es continua ya que sus funciones coordenadas lo son.

Para verificar la inyectividad, sean $(w,x)\times(y,z)$, $(w_1,x_1)\times(y_1,z_1)\in C_1\times C_2$ tal que

$$f((w,x)\times(y,z))=f((w_1,x_1)\times(y_1,z_1))$$

esto es

$$(wy,wz,x)=(w_1y_1,w_1z_1,x_1),$$

entonces $x=x_1$. Además tenemos que $wy=w_1y_1$, $wz=w_1z_1$ y

$$(w-1)^2+x^2={}^1/_9 \quad , \quad (w_1-1)^2+x_1^2={}^1/_9,$$
$$y^2+z^2=1 \quad , \quad y_1^2+z_1^2=1.$$

Entonces $w^2y^2=w_1^2y_1^2$ y $w^2z^2=w_1^2z_1^2$

$$\Rightarrow \quad w^2(y^2+z^2)=w_1^2(y_1^2+z_1^2)$$

$$\rightarrow \qquad w^2=w_1^2$$

pero $(w-1)^2=(w_1-1)^2 \rightarrow w=w_1$, y así $y=y_1$ y $z=z_1$.

$$\rightarrow \quad (w,x)\times(y,z)=(w_1,x_1)\times(y_1,z_1).$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Para probar la suprayectividad de f sea $\phi=(r,s,t)\in D$, entonces ϕ debe cumplir con la ecuación del toro, esto es

$$(\sqrt{r^2+s^2}-1)^2+t^2={}^1/_9.$$

Ahora, definimos $a=\left[\sqrt{r^2+s^2},t\right]$ y $b=\left[\frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}},\frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}\right]$. Afirmamos que $a\times b\in C_1\times C_2$; en efecto, pues para que a este en C_1 debe cumplir con la ecuación

$$(w-1)^2+x^2={}^1/_9,$$

pero al sustituir las coordenadas de a en esta ecuación obtenemos la ecuación del toro, como se obseva facilmente, con lo cual concluimos que $a\in C_1$. Y para que b este en C_2 sus coordenadas deben cumplir con la ecuación.

$$y^2+z^2=1,$$

lo cual es obvio, entonces $b\in C_2$.

Por lo tanto f es suprayectiva.

Con esto ultimo afirmamos que f es un homeomorfismo.

EJEMPLO 3. Concidere el mapeo de recubrimiento

$$p\times i:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\longrightarrow S^1\times\mathbb{R}_+,$$

donde i es el mapeo identidad de $\mathbb{R}_+$ y p es el mapeo del teorema 3.1. A continuación definimos la función f de $S^1\times\mathbb{R}_+$ con $\mathbb{R}^2-0$ como:

$$f: S^1\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}^2-0$$
$$x\times t \longmapsto f(x\times t)=tx,$$

esta función es continua (se trata de una multiplicación por escalar).

f es inyectiva, ya que si $x\times t$, $x'\times t'\in S^1\times\mathbb{R}_+$ son tales que

$$f(x\times t) = f(x'\times t'),$$

entonces $tx=t'x' \Rightarrow |t|\,\|x\|=|t'|\,\|x'\|$, pero como x, $x'\in S^1$ tenemos que $\|x\|=\|x'\|=1$ y como t, $t'\in\mathbb{R}_+$ entonces $t=t'$ y $x=x'$. Por lo tanto f es inyectiva.

Para probar la suprayectividad de f, sea $r\in\mathbb{R}^2-0$ y tomemos

$$f^{-1}(r)=\frac{r}{\|r\|}\times\|r\|.$$

Es claro que $\frac{r}{\|r\|}\in S^1$ y $|t|\in\mathbb{R}_+$ ya que $r\neq 0$ para toda r en $\mathbb{R}_+$, por consiguiente f^{-1} es continua. Así $f\colon S^1\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}^2-0$ es un homeomorfismo.

La composición de f con $p\times i$ nos da un recubrimiento

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}^2-0$$

del plano agujerado por el semiplano superior abierto. Ver figura 14. Este mapeo de recubrimiento aparece en el estudio de la variable compleja con las superficies de Riemann correpondientes a la función logaritmo complejo.

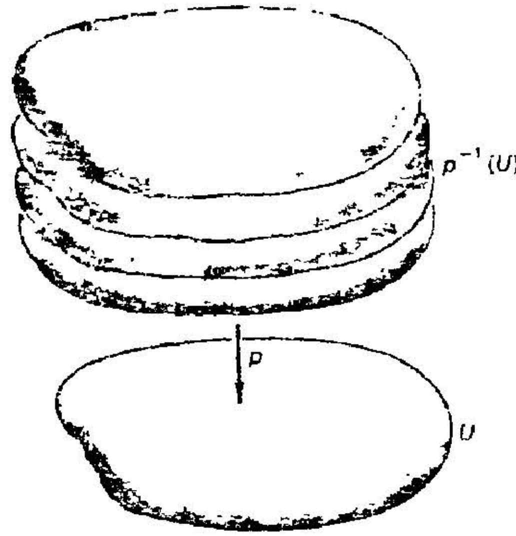


FIG. 10

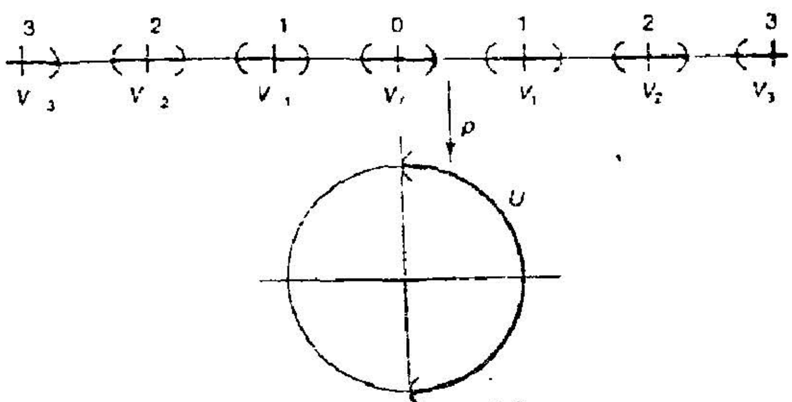


FIG. 11

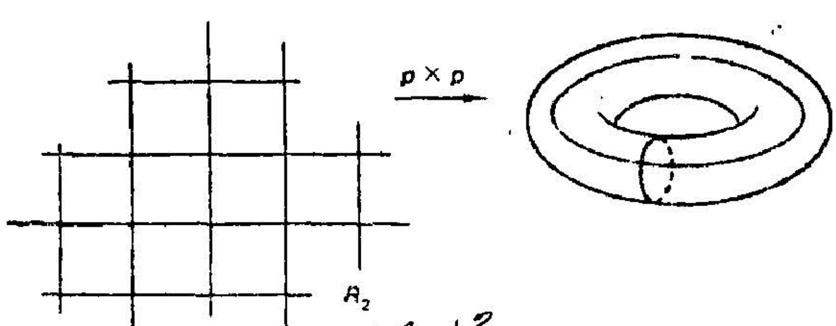


FIG 12

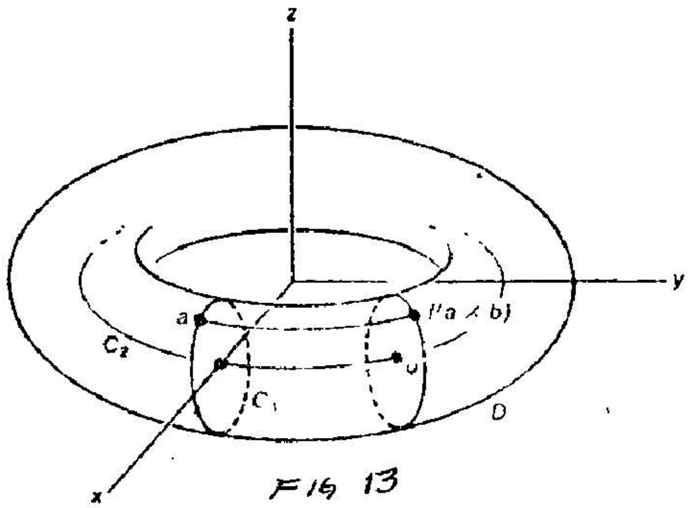


FIG 13

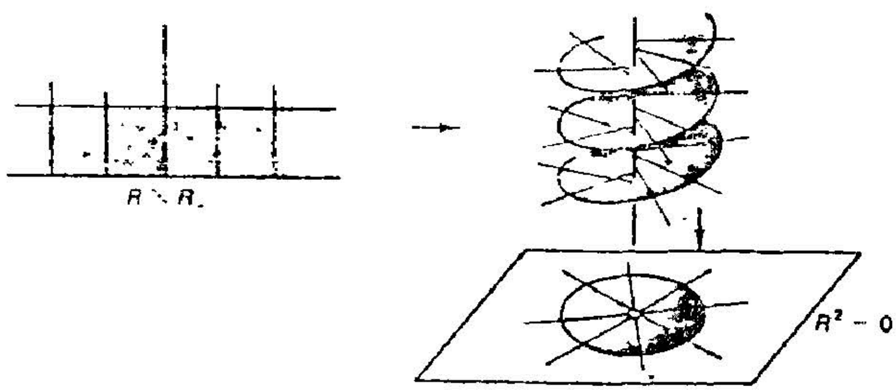


FIG 14

EL GRUPO FUNDAMENTAL DEL CIRCULO

El estudio de los espacios de recubrimiento de un espacio $\mathcal{X}$ esta intimamente relacionado con el estudio del grupo fundamental de $\mathcal{X}$. En esta sección, estableseremos los vinculos entre los dos conceptos, y calcularemos el grupo fundamental del circulo.

DEFINICION. Sea $p\colon E \longrightarrow B$ un mapeo. Si f es un mapeo continuo de algun espacio $\mathcal{X}$ en B, un **levantamiento** de f es un mapeo $\hat{f}\colon \mathcal{X} \longrightarrow E$ tal que $p\circ\hat{f}=f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{X} \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

La existencia de levantamientos cuando p es un mapeo de recubrimiento es una herramienta importante en el estudio de espacios de recubrimiento y el grupo fundamental. Primero mostraremos que para un espacio de recubrimiento, los arcos pueden levantarce; y entonces mostraremos que las arco-homotopias pueden levantarce tambien. Antes, un ejemplo.

EJEMPLO 1. Concidermos el recubrimiento $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ del teorema 3.1. El arco $f\colon [0,1] \longrightarrow S^1$ que empieza en $b_0=(1,0)$ dado por $f(s)=(\cos \pi s, \operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al arco $\hat{f}(s)=s/2$, que empieza en 0 y termina en 1/2. El arco $g(s)=(\cos \pi s, -\operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al arco $\hat{g}(s)=-s/2$ el cual empieza en 0 y termina en -1/2. El arco $h(s)=(\cos 4\pi s, \operatorname{sen} 4\pi s)$ se levanta al arco $\hat{h}(s)=2s$ que empieza en 0 y termina en 2. Intuitivamente, h envuelve al intervalo $[0,1]$ alrededor del circulo dos veces, esto se desprende del hecho de que el levantamiento $\hat{h}$ empieza en 0 y termina en el número 2. Ver figura 15.

LEMA 4.1. Sea $p: E \longrightarrow B$ un mapeo de recubrimiento; sea $p(e_o)=b_o$. Cualquier arco $f: [0,1] \longrightarrow B$ que empieza en b_o tiene un unico levantamiento a un arco $\hat{f}$ en E que empieza en e_o.

Dem.: Recubramos a B por conjuntos abiertos U cada uno de los cuales esta uniformemente recubierto por p. La imagen inversa de todos estos abiertos U bajo f son abiertos en $[0,1]$ y lo cubren completamente, usando el lema del número de Lebesgue encontramos una subdivición de $[0,1]$, digamos s_o, s_1, ..., s_n, tal que para cada i el conjunto $f([s_i,s_{i+1}])$ cae en uno de dichos conjuntos abiertos U. Construimos el lavantamiento $\hat{f}$ paso a paso.

Primero, definimos $\hat{f}(0)=e_o$. Entonces, suponiendo que $\hat{f}(s)$ esta definido para $0 \leq s \leq s_i$, definimos $\hat{f}$ sobre $[s_i,s_{i+1}]$ como sigue: el conjunto $f([s_i,s_{i+1}])$ cae en algun conjunto abierto U que esta uniformemente recubierto por p. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(U)$ en secciones; cada conjunto V_α esta mapeado homeomorficamente en U por p. Ahora $\hat{f}(s_i)$ cae en uno de estos conjunto, digamos en V_o. Definimos $\hat{f}(s)$ para $s\in[s_i,s_{i+1}]$ por la ecuación

$$\hat{f}(s)=(p|_{V_o})^{-1}(f(s)).$$

Dado que $p|_{V_o}: V_o \longrightarrow U$ es un homeomorfismop, $\hat{f}$ sera continuo sobre $[s_i,s_{i+1}]$.

Continuando de esta manera, definimos $\hat{f}$ sobre todo el intervalo $[0,1]$. La continuidad de $\hat{f}$ se sigue del lema del pegado; el hecho de que $p\circ\hat{f}=f$ se sigue de la definición de $\hat{f}$.

La unicidad de $\hat{f}$ se prueba paso a paso. Supongamos que $\tilde{f}$ es otro levantamiento de f que empieza en e_o. Entonces $\tilde{f}(0)=e_o=\hat{f}(0)$. Supongamos que $\tilde{f}(s)=\hat{f}(s)$ para toda s tal que $0 \leq s \leq s_i$. Sea V_o como en el parrafo anterior; entonces, para

$s\in[s_i,s_{i+1}]$, $\hat{f}(s)$ esta definido como $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$. Ahora como $\tilde{f}$ es un lavantamiento de f, debe mandar al intervalo $[s_i,s_{i+1}]$ en el conjunto $p^{-1}(U)=\cup_\alpha V_\alpha$. Las secciones V_α son abiertos y disjuntos; dado que el conjunto $\tilde{f}([s_i,s_{i+1}])$ es conexo, debe caer por completo en uno de los conjuntos V_α. Dado que $\tilde{f}(s_i)=\hat{f}(s_i)$, el cual esta en V_0, $\tilde{f}$ debe mandar a todo el intervalo $[s_i,s_{i+1}]$ en el conjunto V_0. Así, para $s\in[s_i,s_{i+1}]$, $\tilde{f}(s)$ debe ser igual a algun punto y de V_0 que cae en $p^{-1}(f(s))$. Pero solo hay uno de tales puntos y, o sea, $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$. Entonces $\tilde{f}(s)=\hat{f}(s)$ para $s\in[s_i,s_{i+1}]$. □

LEMA 4.2. Sea $p:E\longrightarrow B$ un mapeo de recubrimiento; sea $p(e_0)=b_0$. Sea el mapeo $F:I\times I\longrightarrow B$ continuo, con $F(0,0)=b_0$. Entonces hay un levantamiento de F a un mapeo continuo

$$\hat{F}:I\times I\longrightarrow E$$

tal que $\hat{F}(0,0)=e_0$. Si F es una arco-homotopia, entonces $\hat{F}$ es una arco-homotopia.

De hecho, el levantamiento $\hat{F}$ de F es unico, pero esto no lo probaremos.

Dem.: Sea $F:I\times I\longrightarrow E$, con $F(0,0)=b_0$, definimos $\hat{F}(0,0)=e_0$. Luego, usando el lema anterior, extendemos la definición de $\hat{F}$ al borde izquierdo $0\times I$ y al borde inferior $I\times 0$ de $I\times I$. Ahora definimos $\hat{F}$ en todo el cuadrado $I\times I$ de la siguiente manera:

Cubrimos a B por conjunto abiertos U que estan uniformemente recubiertos por p. La imagen inversa bajo F de estos conjuntos $F^{-1}(U)$ son abiertos en $I\times I$ y forman una cubierta abierta de este; como $I\times I$ es un espacio metrico compacto, podemos escojer dos subdiviciones $s_0\leq s_1\leq \dots \leq s_m$,

$t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ de I tal que para cada rectangulo

$$I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

su imagen bajo F caiga en un conjunto abierto de B que este uniformemente recubierto por p. (Aquí usamos el lema del número de Lebesgue.). A continuación construiremos el levantamiento $\hat{F}$ paso a paso. Primero definimos a $\hat{F}$ en el rectangulo $I_1 \times J_1$, luego en el $I_2 \times J_1$ y así con todos los rectangulos de la forma $I_i \times J_1$ (renglón inferior); luego continuamos con los rectangulos $I_i \times J_2$ en el siguiente renglón, etc..

En el caso general, dados i_0 y j_0, asumimos que $\hat{F}$ esta definido en A, donde A es la unión de $0 \times I$, $I \times 0$ con los rectangulos de la forma $I_i \times J_j$ para los cuales $j < j_0$ ó $j = j_0$ e $i < i_0$.

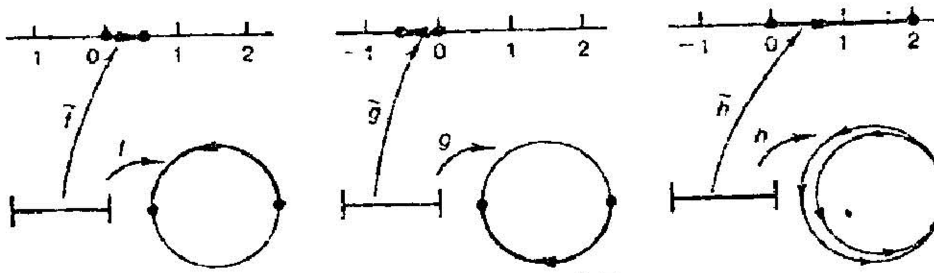
Asimismo suponemos que $\hat{F}$ es un levantamiento continuo de $F|_A$. Ahora definimos a $\hat{F}$ sobre $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Escojamos un conjunto U en B que este uniformemente recubierto por p tal que $F(I_{i_0} \times J_{j_0}) \subset U$. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición en secciones de $p^{-1}(U)$; como ya sabemos, cada V_α es mapeado homeomorficamente en U por p. Ahora, tomemos a $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$, este conjunto es la unión de los margenes izquierdo e inferior del rectangulo $I_{i_0} \times J_{j_0}$ y por consiguiente es conexo. Además, como $\hat{F}$ esta definida en C, entonces $\hat{F}(C)$ es conexo y debe estar contenido en uno de los conjunto V_α. Supongamos que cae en V_0. Esta situación se muestra en la figura 16.

Representemos la restricción de p a V_0 por p_0, así $p_0 : V_0 \longrightarrow U$. Sabemos que para $x \in C$

$$p_0(\hat{F}(x)) = p(\hat{F}(x)) = F(x),$$

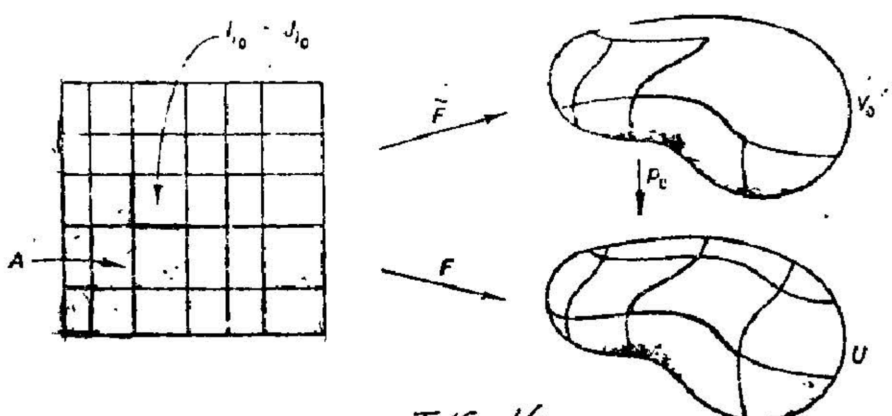
dado que $\hat{F}$ es un levantamiento de $F|_A$, por lo tanto

$$\hat{F}(x) = p_0^{-1}(F(x)).$$



1 0 1 2
-1 0 1 2
-1 0 1 2
$\tilde{f}$
f
$\tilde{g}$
g
$\tilde{h}$
h

FIG. 15



$I_{i_0} \cdot J_{j_0}$
A
$\tilde{F}$
F
V_0
P_0
U

FIG 16

Así, dada $x\in I_{i_0}\times J_{j_0}$, extendemos a $\hat{F}$ definiendolo de esta manera. El mapeo $\hat{F}$ resultante sera continuo por el lema del pegado.

Continuando de esta manera definimos $\hat{F}$ en todo el cuadrado I^2. $\hat{F}$ así definido es un levantamiento de F pues resulta ser continuo y además

$$F(x)=(p\circ\hat{F})(x) \quad \forall\ x\in I^2.$$

Ahora, supongamos que F es una arco-homotopia, mostraremos que $\hat{F}$ tambien lo es. Como F es una arco-homotopia, debe enviar al margen izquierdo $0\times I$ de I^2 a un solo punto b_0 de B; además, como $\hat{F}$ es un levantamiento de F, envia a este margen al conjunto $p^{-1}(b_0)$ el cual tiene la topologia discreta en E. Dado que $\hat{F}$ es continuo y $0\times I$ es conexo, $\hat{F}(0\times I)$ es conexo y por esto debe ser igual a un conjunto de un solo punto. De igual modo se llega a la conclusión de que $\hat{F}(1\times I)$ debe tener un solo elemento. Por lo tanto $\hat{F}$ es una arco-homotopia. □

El siguiente teorema relaciona de manera crucial a los espacios de recubrimiento y el grupo fundamental.

TEOREMA 4.3. Sea $p: E\longrightarrow B$ un mapeo de recubrimiento; sea $p(e_0)=b_0$. Sean f y g dos arcos en B de b_0 a b_1; representemos por $\hat{f}$ y $\hat{g}$ a sus respectivos levantamientos a arcos en E, los cuales empiezan en e_0. Si f y g son arco-homotopico, entonces $\hat{f}$ y $\hat{g}$ terminan en el mismo punto de E y son arco-homotopicos.

Dem.: Sea $F: I\times I\longrightarrow B$ una arco-homotopia entre los arcos f y g. Luego $F(0,0)=b_0$. Sea $\hat{F}: I\times I\longrightarrow E$ un levantamiento de F en E tal que $\hat{F}(0,0)=e_0$. El lema anterior nos asegura que $\hat{F}$ es una arco-homotopia y que $\hat{F}(0\times I)=\{e_0\}$ y $\hat{F}(1\times I)$ es un conjunto con un solo punto $\{e_1\}$.

La restricción $\hat{F}|_{I\times 0}$ de $\hat{F}$ al margen inferior del cuadrado

$\mathbb{I}^2$ es unarco en E que empieza en e_o; $\hat{F}|_{\mathbb{I}\times 0}$ es un levantamiento de $F|_{\mathbb{I}\times 0}=f$ entonces, debemos tener que $\hat{F}|_{\mathbb{I}\times 0}=\hat{f}$, por la unicidad de los levantamientos. De igual modo, $\hat{F}|_{\mathbb{I}\times 1}$ es un arco en E el cual es un levanamiento del arco $F|_{\mathbb{I}\times 1}=g$, y empieza en e_o por que $\hat{F}(0\times\mathbb{I})=\{e_o\}$. Nuevamente, por la unicidad de los levantamientos, tenemos que $\hat{F}|_{\mathbb{I}\times 1}=\hat{g}$. Ahora, como f y g terminan en el mismo punto, entonces $\hat{f}$ y $\hat{g}$ deben terminar en el mismo punto, pero $\hat{F}(1\times\mathbb{I})=\{e_1\}$, entonces $\hat{f}$ y $\hat{g}$ terminan en e_1 y $\hat{F}$ resulta ser una arco-homotopia entre ellos. □

El teorema anterior se aplica para el caso del circulo.

TEOREMA 4.4. El grupo fundamental del circulo es ciclico infinito.

Dem.: Denotemos por b_o al punto (1,0) de S^1. Debemos construir un isomorfismo del grupo $\pi_1(S^1,b_o)$ con el grupo de los enteros bajo la suma $(\mathbb{Z},+)$.

Consideremos al mapeo de recubrimiento

$$p:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$$

dado por la ecuación $p(x)=(\cos 2\pi x,\ \mathrm{sen}\ 2\pi x)$. Si f es un lazo en S^1 basado en b_o, tenemos que

$$f:\mathbb{I}\longrightarrow S^1 \quad , \quad f(0)=b_o=f(1).$$

Sea $\hat{f}$ el levantamiento de f a un arco en $\mathbb{R}$ que empieza en 0. Ahora veamos quien es $p^{-1}(b_o)$

$$\begin{aligned} p^{-1}(b_o) &= \{x\in\mathbb{R} \mid p(x)=b_o=(1,0)\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid (\cos 2\pi x,\ \mathrm{sen}\ 2\pi x)=(1,0)\} \\ &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pero tenemos que, por ser $\hat{f}$ un levantamiento de f, entonces $(p\circ\hat{f})(1)=f(1)=b_o$, esto es $\hat{f}(1)\in p^{-1}(b_o)=\mathbb{Z}$. Entonces $\hat{f}(1)$ debe ser igual a algun entero n. Ahora bien, este entero n depende solamente de la clase de arco-homotopía de f, ya que para cualquier otro lazo arco-homotopico a f le correspondera el mismo entero n, como lo asegura el teorema anterior. Ahora definimos al mapeo

$$\phi: \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

asociando a $[f]$ este entero, esto es $\phi([f])=\hat{f}(1)$. Veamos que este mapeo ϕ es un isomorfismo de grupos.

Para probar la suprayectividad de ϕ, sea n un entero. Debido a que $\mathbb{R}$ es arco-conexo, podemos escoger un arco $\hat{f}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de 0 a n. Ahora definimos $f=p\circ\hat{f}$, el cual es un arco en S^1, ya que $\hat{f}$ es un arco y p es continuo; más aun,

$$f(0)=(p\circ\hat{f})(0)=b_0$$
$$\text{y } f(1)=(p\circ\hat{f})(1)=b_0.$$

Por lo tanto f es un lazo en S^1 basado en b_0 y $\hat{f}$ es un levantamiento de f a un arco en $\mathbb{R}$ que comienza en 0. Luego, por definición

$$\phi([f]) = n.$$

Ahora, verifiquemos la inyectividad de ϕ. Supongamos que $\phi([f])=n=\phi([g])$. Representemos por $\hat{f}$ y $\hat{g}$ a los levantamientos de f y g, respectivamente, a arcos en $\mathbb{R}$ que empiezan en 0. Por hipotesis $\hat{f}$ y $\hat{g}$ terminan en n. Además, como ya sabemos, el grupo fundamental de $\mathbb{R}$ es el trivial, entonces $\hat{f}$ y $\hat{g}$ son arco-homotopicos; sea $\hat{F}$ una arco-homotopia entre ellos. Definimos $F=p\circ\hat{F}$, este mapeo es continuo ya que p y $\hat{F}$ lo son y además

$$F(s,0)=p(\hat{F}(s,0))=p(\hat{f}(s))=f(s)$$
$$F(s,1)=p(\hat{F}(s,1))=p(\hat{g}(s))=g(s)$$
$$F(0,t)=p(\hat{F}(0,t))=p(0)=b_0$$
$$F(1,t)=p(\hat{F}(1,t))=p(1)=b_0.$$

Esto indica que F es una arco-homotopia estre f y g, entonces

$$[f] = [g].$$

Por lo tanto ϕ es inyectiva.

Por ultimo haremos ver que ϕ es un homomorfismo. Sean f y g dos lazos en S^1 basados en b_o. Representemos por $\hat{f}$ y $\hat{g}$ a sus respectivos levantamientos a arcos en $\mathbb{R}$ que comienzan en 0 en 0, tal que $\hat{f}(1)=n$ y $\hat{g}(1)=m$. definimos ahora a h como

$$h(s)=\begin{cases} \hat{f}(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ n+\hat{g}(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}.$$

h es un arco en $\mathbb{R}$ que empieza en 0 y termina en n+m. Luego

$$p(h(s))=\begin{cases} p(\hat{f}(2s)) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ p(n+\hat{g}(2s-1)) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}.$$

Usando el hecho de que las funciones seno y coseno tienen periodo 2π, tenemos que

$$p(h(s))=\begin{cases} f(2s) & \text{si } s\in[0,{}^1/_2] \\ g(2s-1) & \text{si } s\in[{}^1/_2,1] \end{cases}=(f*g)(s),$$

entonces h es un levantamiento de f*g y por definición

$$\phi([f*g])=h(1)=n+m$$

$$\rightarrow \quad \phi([f]*[g]=\phi([f]) + \phi([g]).$$

Por lo tanto ϕ es un homomorfismo.

La demostración del teorema anterior se puede generalizar a espacios de recubrimiento simplemente conexos. La única particularidad del recubrimiento $p:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$ fue la existencia de la operación de adición en $\mathbb{R}$, la cual nos permitio demostrar que ϕ es un homomorfismo. En un espacio de recubrimiento general, no tenemos esta operación de adición; sinembargo podemos extraer una buena parte de la información del grupo fundamental, como se enuncia en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5. Sea $p:(E,e_o)\longrightarrow(B,b_o)$ un mapeo de recubrimiento. Si E es arco-conexo, entonces hay una suprayección

$$\phi: \pi_1(B,b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0).$$

Si E es simplemente conexo, ϕ es una biyección.

Dem.: Sea f un lazo en B basdo en b_0. Sea $\hat{f}$ su levantamiento a un arco en E que comienza en e_0. Luego

$$(p \circ \hat{f})(1) = f(1) = b_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(1) \in p^{-1}(b_0).$$

Nuevamente el teorema 4.3 nos asegura que este punto $\hat{f}(1)$ esta determinado de manera unica por la clase de arco-homotopia a la cual pertenece f. Así definimos

$$\phi: \pi_1(B,b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

asociando a $[f]$ este punto, esto es $\phi([f]) = \hat{f}(1)$. Veamos que ϕ es suprayectivo. Sea $e \in p^{-1}(b_0)$, como E es arco-conexo podemos tomar un arco $\hat{f}: [0,1] \longrightarrow E$ en E de e_0 a e y definir $f = p \circ \hat{f}$. Resulta así que

$$f(0) = (p \circ \hat{f})(0) = p(\hat{f}(0)) = p(e_0) = b_0$$
$$f(1) = (p \circ \hat{f})(1) = p(\hat{f}(1)) = p(e) = b_0.$$

Entonces f es un lazo en E basado en e_0 y $\hat{f}$ es su levantamiento a un arco en E que empieza en e_0. Así, por definición tenemos que $\phi([f]) = e$.

Ahora, si E es simplemente conexo tenemos que mostrar que ϕ es inyectivo, para esto supongamos que $\phi([f]) = e = \phi([g]) \in p^{-1}(b_0)$. Sean $\hat{f}$ y $\hat{g}$ los levantamientos de f y g, respectivamente, a arcos en E que empiezas en e_0. Tenemos que $\hat{f}(1) = e = \hat{g}(1)$, por hipotesis. Aplicando el hecho de que E es simplemente conexo, tenemos que $\hat{f}$ y $\hat{g}$ son arco-homotopicos; sea $\hat{F}$ una arco-homotopia entre ellos y definamos $F = p \circ \hat{F}$, entonces

$F(s,0) = p(\hat{F}(s,0)) = p(\hat{f}(s)) = f(s)$ y $F(s,1) = p(\hat{F}(s,1)) = p(\hat{g}(s)) = g(s)$.

$F(0,t) = p(\hat{F}(0,t)) = p(e_0) = b_0$ y $F(1,t) = p(\hat{F}(1,t)) = p(e) = b_0$.

Entonces tenemos que f es arco-homotopico a g, esto implica que $[f] = [g]$ y por lo tanto ϕ es inyectivo. □

EL GRUPO FUNDAMENTAL DE $\mathbb{R}^n-0$

En esta sección probaremos que el grupo fundamental del plano agujerado $\mathbb{R}^2-0$ es ciclico infinito. Esta conclusión la obtendremos de un resultado más general que relaciona al grupo fundamental de S^{n-1} con el de $\mathbb{R}^n-0$. Primero introduciremos la definición de retracción de deformación fuerte.

DEFINICION. Sea A un subespacio de $\mathcal{X}$. Entonces se dice que A es un **retracto** de $\mathcal{X}$ si hay un mapeo continuo $r:\mathcal{X}\longrightarrow A$ tal que

$$r(a)=a \quad \forall a\in A.$$

Al mapeo r se le llama una **retracción** de $\mathcal{X}$ en A.

En otras palabras A es un retracto de $\mathcal{X}$ si $r|_A$ es el mapeo identidad en A.

DEFINICION. Sea A un subespacio de $\mathcal{X}$. Entonces se dice que A es un **retracto de deformación fuerte** de $\mathcal{X}$ si hay un mapeo continuo $H:\mathcal{X}\times I\longrightarrow\mathcal{X}$ tal que

$H(x,0)=x$ para $x\in\mathcal{X}$, $H(x,1)\in A$ para $x\in\mathcal{X}$, $H(a,t)=a$ para $a\in A$ y $t\in I$.

Al mapeo H se le llama una **retracción de deformación fuerte.**

En otra palabras, el espacio A es un retracto de deformación fuerte de $\mathcal{X}$ si $\mathcal{X}$ puede deformarse de manera gradual en A, y si durate la deformación cada punto de A permanece fijo. Al terminar la deformación, tenemos una retracción de $\mathcal{X}$ en A, mapeando x en $H(x,1)$.

EJEMPLO 1. El mapeo $H:(\mathbb{R}^n-0)\times I\longrightarrow\mathbb{R}^n-0$ definido por

$$H(x,t)=t\frac{x}{\|x\|}+(1-t)x$$

es una retracción de deformación fuerte de $\mathbb{R}^n-0$ en S^{n-1},ya que

$$H(x,0)= x \qquad \text{para } x\in\mathbb{R}^n-0,$$
$$H(x,1)=\frac{x}{\|x\|}\in\mathbb{S}^{n-1} \quad \text{para } x\in\mathbb{R}^n-0.$$

Y si $a\in\mathbb{S}^{n-1}$ y $t\in\mathbb{R}^n-0$, tenemos que $\|a\|=1$, y entonces

$$H(a,t)=t\frac{a}{\|a\|} + (1-t)a=ta + a - ta= a.$$

Esta retracción de deformación fuerte colapsa gradualmente cada linea radial en el punto donde intersecta a $\mathbb{S}^{n-1}$. (Ver figura 17)

El siguiente teorema relaciona a las retracciónes de deformación fuerte con el grupo fundamental.

TEOREMA 5.1. Sea A un retracto de deformación fuerte de $\mathscr{X}$. Sea $a_0\in A$. Entonces el mapeo inclución

$$j\colon (A,a_0)\longrightarrow(\mathscr{X},a_0)$$

induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Dem.: Para lograr nuestro proposito necesitamos obtener una inversa para j_*. Ahora, como A es un retracto de deformación fuerte de $\mathscr{X}$, existe $H\colon\mathscr{X}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathscr{X}$, tal que

$$H(x,0)=x \text{ para } x\in\mathscr{X},$$
$$H(x,1)\in A \text{ para } x\in\mathscr{X},$$
$$H(a,t)=a \text{ para } a\in A \text{ y } t\in\mathbb{I}.$$

Sea $r\colon\mathscr{X}\longrightarrow A$ el mapeo continuo definido por $r(x)=H(x,1)$.

Afirmamos que r_* es una inversa para j_*. Para ver esto, primero consideremos el siguiente mapeo de composición

$$(A,a_0)\xrightarrow{j}(\mathscr{X},a_0)\xrightarrow{r}(A,a_0).$$

Así, si $a\in A$, entonces $(r\circ j)(a)=r(j(a))=r(a)=H(a,1)=a$, entonces $r\circ j=i_A$ (el mapeo identidad en A). Obtenemos así, por las propiedades functoriales del homomorfismo inducido, que $r_*\circ j_*$ es el isomorfismo identidad de $\pi_1(A,a_0)$.

Para probar que $j_*\circ r_*$ es el isomorfismo identidad de $\pi_1(\mathscr{X},a_0)$, sea f un lazo en $\mathscr{X}$ basado en a_0. Entonces $j_*(r_*([f]))$ sera la clase de arco-homotopia del lazo

$g=j\circ r\circ f:\mathbb{I}\longrightarrow \mathbb{X}$, donde g esta definido por $g(s)=H(f(s),1)$.

Ahora necesitamos mostrar que $g \overset{\sim}{\Rightarrow} f$, para asegurar que, bajo $j_*\circ r_*$, $[f]$ se mapea en si misma. Para esto, definimos $F:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{X}$ como $F(s,t)=H(f(s),t)$. Este mapeo es una arco-homotopia entre f y g. En efecto, pues:

$$F(s,0)=H(f(s),0)=f(s)$$
$$F(s,1)=H(f(s),1)=g(s)$$
$$y \quad F(0,t)=H(f(0),t)=H(a_0,t)=a_0$$
$$F(1,t)=H(f(1),t)=H(a_0,t)=a_0.$$

Por lo tanto $j_*\circ r_*$ es el isomorfismo identidad de $\pi_1(\mathbb{X},a_0)$. Entonces j induce un isomorfismo de grupos fundamentales. □

COROLARIO 5.2. Si $x_0\in\mathbb{S}^{n-1}$, la inclución

$$j:(\mathbb{S}^{n-1},x_0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n-0,x_0)$$

induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Dem.: Aquí lo que debemos hacer notar es que $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^n-0$. Pero en el ejemplo anterior vimos que el mapeo $H:(\mathbb{R}^n-0)\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{R}^n-0$ definido por

$$H(x,t)=t\frac{x}{\|x\|}+(1-t)x$$

es precisamente una retracción de deformación fuerte de $\mathbb{R}^n-0$ en $\mathbb{S}^{n-1}$. Así, se sigue del teorema precedente que $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1},x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathbb{R}^n-0,x_0)$. □

Este corolario nos dice, en particular, que el grupo fundamental del plano agujerado es ciclico infinito.

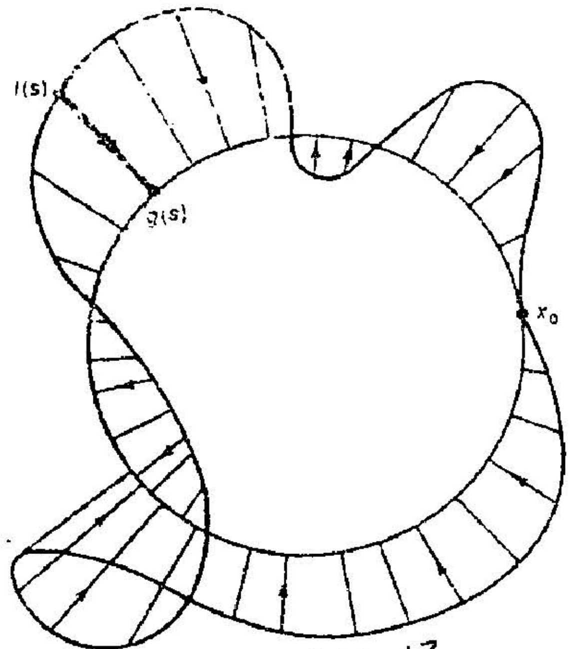


FIG. 17

EL GRUPO FUNDAMENTAL DE S^n

Ahora, calcularemos el grupo fundamental de S^n, para lograrlo necesitaremos el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1. (El teorema de Van Kampen especial.). Sea $X=U\cup V$, donde U y V son abiertos en X y $U\cap V$ es arco-conexo. Sex x_o un punto de $U\cap V$. Si ambas inclusiones

$$i:(U,x_o)\longrightarrow(X,x_o) \text{ y } j:(V,x_o)\longrightarrow(X,x_o)$$

inducen el homomorfismo cero de grupos fundamentales, entonces $\pi_1(X,x_o)=0$.

Cabe hacer notar que si U y V son simplemente conexos, entonces i_* y j_* son los homomorfismos cero, respectivamente. Este sera el caso que emplearemos para calcular el grupo fundamental de S^n.

Dem.: Sea $f:I\longrightarrow X$ un lazo basado en x_o. Lo que debemos demostrar es que f es arco-homotopico a un lazo constante.

Paso 1. Usando el lema del número de Lebesgue, podemos encontrar una subduvición del intervalo $[0,1]$ de la forma

$$0=a_o<a_1<\ldots<a_n=1$$

tal que para cada i, $f([a_{i-1},a_i])$ cae por completo en uno de los conjuntos abiertos U ó V. De entre todas las subdiviciones, escogemos una para la cual el número n de subintervalos sea el minimo. Resulta claro que para cada i, el punto $f(a_i)$ cae en $U\cap V$.

Paso 2. Ahora definimos $f_i:[0,1]\longrightarrow X$ como

$$f_i(s)=f((1-s)a_{i-1}+sa_i) \text{ para } s\in[0,1].$$

Este arco es la reparametrizació a $[0,1]$ de la restricción de f a $[a_{i-1},a_i]$. A continuación mostraremos que f_i es arco-homotopico a un arco que cae por completo en U.

Es claro que si f_i cae en U, no necesitamos hacer nada, pues definimos F_i como la arco-homotopia trivial $F_i(s,t)=f_i(s)$ de f_i con el mismo.

Si f_i no cea dentro de U, entonces debe caer enteramente dentro de V. Dado que $U\cap V$ es arco-conexo, podemos escoger arcos g y h en $U\cap V$ del punto base x_o a cada uno de los extremos de f_i, $f_i(0)$ y $f_i(1)$ respectivamente. (ver figura 18). Es claro que la composición $(g*f_i)*\bar{h}$ es un lazo en V basado en x_o. Bajo el mapeo de inclución j, tenemos que este lazo es un lazo en $\mathscr{X}$ basado en x_o. Además, por hipotesis

$$j_*([\ (g*f_i)*\bar{h}\ ]) = [e_{x_o}]$$
$$\rightarrow \quad [\ j\circ\{(g*f_i)*\bar{h}\}\ ] = [e_{x_o}]$$
$$\rightarrow \quad [\ (r*f_i)*\bar{h}\ ] = [e_{x_o}]$$

así, $(g*f_i)*\bar{h}$ es arco-homotopico, en $\mathscr{X}$, al lazo constante e_{x_o}. Entonces, por las propiedades de la operación $*$, f_i debe ser arco-homotopico, en $\mathscr{X}$, al arco $\bar{g}*h$. Denotemos por F_i a la arco-homotopia que hay, en $\mathscr{X}$, entre f_i y el arco $\bar{g}*h$, el cual cea en $U\cap V$. Así, $F_i:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathscr{X}$.

Ahora, reparametrizamos a F_i de manera tal que su dominio caiga en el conjunto $[a_{i-1},a_i]\times\mathbb{I}$ así, pegamos estos conjuntos para obtener una arco-homotopia F entre f y un arco que cae completamente en U. Más formalmente definimos $F:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathscr{X}$ como

$$F(s,t)=F_i\left(\frac{s-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}},t\right) \quad \text{para} \quad s\in[a_{i-1},a_i]$$

Y como cada arco-homotopia F_i deja fijos a los extremos, entonces F esta bien definida; aplicando el lema de la pegadura obtenemos la continuidad de F. Tomemos a $f'(s)=F(s,1)$.

Paso 3. Hasta aquí tenemos que f es arco-homotopico (en $\mathscr{X}$) a un lazo f' que cae completamente en U. Además, sabemos que

$$i_*([f'])=[e_{x_o}]$$
$$[i\circ f']=[e_{x_o}] \qquad ie)\ [f']=[e_{x_o}]$$

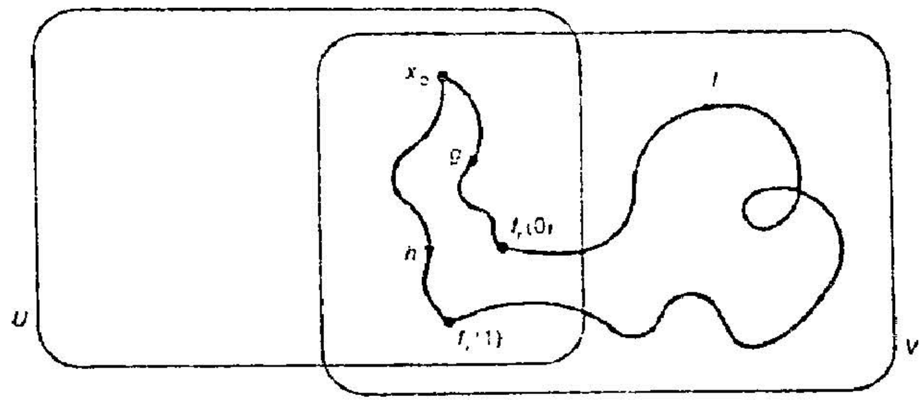


FIG. 18

Así, f' es arco-homotopico (en $\mathbb{X}$) al lazo constante e_{x_0}. Esto implica que $f \simeq_p f' \simeq_p e_{x_0}$, tomandolos como lazos en $\mathbb{X}$, como deseabamos.

Ahora estamos en condiciones de calcular el grupo fundamental de $\mathbb{S}^n$.

TEOREMA 6.2. Para $n \geq 2$, la n-esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa.

Dem.: Sea $p=(0, 0, \ldots, 0, 1)\in\mathbb{R}^{n+1}$ el polo norte de $\mathbb{S}^n$ y $q=(0, 0, \ldots, 0,-1)$ el plolo sur.

Paso 1. Lo primero que veremos es que $\mathbb{S}^n-p$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Sea $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ un punto de $\mathbb{S}^n$ diferente de p. Tomemos la linea recta en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$tx + (1-t)p$$

que pasa por x y p e intersectemosla con el plano x_{n+1}; denotemos por $f(x)$ al punto de intersección. Esto nos permite definir al mapeo $f:\mathbb{S}^n-p\longrightarrow\mathbb{R}^n$ como:

$$f(x)=\frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

A este mapeo se le conoce como proyección estereografica. Este mapeo es continuo ya que x_{n+1}. Mediante calculos sencillos se verifica que el mapeo $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{S}^n-p$ dado por

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n)=(ty_1, ty_2, \ldots, ty_n, 1-t),$$

donde $t=2/(\Sigma_{i=1}^{n}y_i^2)$, es un mapeo inverso para f, entonces f es un homeomorfismo.

Como $\mathbb{S}^n-q$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n-p$ bajo el mapeo de reflexión

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})=(x_1, x_2, \ldots, x_n,-x_{n+1})$$

entonces $\mathbb{S}^n-q$ tambien ews homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Paso 2. Ahora definimos $U=\mathbb{S}^n-p$ y $V=\mathbb{S}^n-q$. Es claro que U y V son abiertos en $\mathbb{S}^n$ y que $\mathbb{S}^n=U\cup V$. Como U y V son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ entonces son simplemente conexos.

Además, $U \cap V = \mathbb{S}^n - p - q$ y es homeomorfo a $\mathbb{R}^n - 0$ bajo la proyección estereografica. Nesecitamos ver que $\mathbb{R}^n - 0$ es arco-conexo: cualquier punto $x \in \mathbb{R}^n - 0$ se puede unir al punto $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ mediante el segmento de linea recta en $\mathbb{R}^n$, exepto por aquellos puntos x de la forma $(a, 0, \ldots, 0)$, donde $a < 0$. Para estos casos unimos a x con $x_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ mediante el segmento de linea recta y luego tomamos al segmento de linea recta de x_1 a x_0. (Aquí usamos el hecho de que $n > 1$). Entonces $U \cap V$ es arco-conexo y por el teorema 6.1 concluimos que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo. □

COROLARIO 6.3. $\mathbb{R}^n - 0$ es simplemente conexo si $n > 2$.

Dem.: Por el corolario 5.2, $\mathbb{R}^n - 0$ y $\mathbb{S}^{n-1}$ tienen grupos fundamentales isomorfos. □

COROLARIO 6.4. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos, si $n > 2$.

Dem.: Si borramos un punto de $\mathbb{R}^n$ obtenemos un espacio simplemente conexo, mientras que si hacemos lo mismo con $\mathbb{R}^2$ el espacio resultante no lo es.

GRUPOS FUNDAMENTALES DE SUPERFICIES

Una superficie es un espacio Hausdorff con una base numerable para el cual todo punto tiene una vecindad que es homeomorfa con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Las superficies son de gran interes en varias partes de la matemáticas, incluyendo a la geometria, la topologia y el analisis complejo. En esta sección estudiaremos a tres superficies familiares, la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{T}$ yel plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, y mediante la comparación de sus grupos fundamentales probaremos que no son isomorfos.

Para calcular el grupo fundamental del toro, necesitaremos un teorema para estableser el grupo fundamental de un espacio producto.

TEOREMA 7.1. $\pi_1(\mathscr{X}\times\mathscr{Y},x_0\times y_0)$ es isomorfo con $\pi_1(\mathscr{X},x_0)\times\pi_1(\mathscr{Y},y_0)$.

Dem.: Recordemos que si A y B son grupos con operación $\cdot$, entonces el producto carte~~c~~siano $A\times B$ es un grupo bajo la operación

$$(a\times b)\cdot(a'\times b')=(a\cdot a')\times(b\cdot b').$$

Tambien si $h:C\longrightarrow A$ y $k:C\longrightarrow B$ son homomorfismos, entonces el mapeo $\Phi:C\longrightarrow A\times B$ dado por $\Phi(c)=h(s)\times k(s)$ es un homomorfismo de grupos.

Ahora, si tomamos a las proyecciónes $p:\mathscr{X}\times\mathscr{Y}\longrightarrow\mathscr{X}$ y $q:\mathscr{X}\times\mathscr{Y}\longrightarrow\mathscr{Y}$, y a los puntos base indicados en el teorema obtenemos a los homomorfismos inducidos:

$$p_*:\pi_1(\mathscr{X}\times\mathscr{Y},x_0\times y_0)\longrightarrow\pi_1(\mathscr{X},x_0),$$
$$q_*:\pi_1(\mathscr{X}\times\mathscr{Y},x_0\times y_0)\longrightarrow\pi_1(\mathscr{Y},y_0).$$

Esto nos permite definir a un homomorfismo

$$\Phi:\pi_1(\mathscr{X}\times\mathscr{Y},x_0\times y_0)\longrightarrow\pi_1(\mathscr{X},x_0)\times\pi_1(\mathscr{Y},y_0)$$

mediante la ecuación

$$\Phi([f])=p_*([f])\times q_*([f])=[p\circ f]\times[q\circ f].$$

Veamos que Φ así definido es un isomorfismo.

Sea $g:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}$ un lazo basado en x_0 y $h:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{Y}$ un lazo basado en y_0, entonces $[g]\times[h]$ es un elemento de $\pi_1(\mathcal{X},x_0)\times\pi_1(\mathcal{Y},y_0)$. Si definimos a $f:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ como

$$f(s)=g(s)\times h(s),$$

entonces f es un lazo en $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ basado en $x_0\times y_0$, y además

$$\Phi([f])=[p\circ f]\times[q\circ f]=[g]\times[h].$$

Por lo tanto, para todo elemento de $\pi_1(\mathcal{X},x_0)\times\pi_1(\mathcal{Y},y_0)$ existe una preimagen en $\pi_1(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},x_0\times y_0)$ y así Φ es suprayectivo.

Para verificar la inyectividad de Φ calculemos $ker(\Phi)$. Supongamos que $f:\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ es un lazo en $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ basado en $x_0\times y_0$ y que $[f]\in ker(\Phi)$, esto es

$$\Phi([f])=[p\circ f]\times[q\circ f]=e_{x_0}\times e_{y_0}.$$

Esto significa que $p\circ f\cong_p e_{x_0}$ y que $q\circ f\cong e_{y_0}$; sean $G:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}$ y $H:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{Y}$ sus respectivas arco-homotopias. Entonces el mapeo $f:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ dado por

$$F(s,t)=G(s,t)\times H(s,t)$$

es una arco-homotopia enter f y el lazo constante basado en $e_{x_0}\times e_{y_0}$. En efecto, pues:

$$F(s,0)=G(s,0)\times H(s,0)=p\circ f(s)\times q\circ f(s)$$
$$F(s,1)=G(s,1)\times H(s,1)=x_0\times y_0$$
$$\text{y}\quad F(0,t)=G(0,t)\times H(0,t)=x_0\times y_0=G(1,t)\times H(1,t)=F(1,t).$$

Por lo tanto Φ es un isomorfismo de grupos □

COROLARIO 7.2. El grupo fundamental del toro $\mathbb{T}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Ahora se definira el n-espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ y se calculara su grupo fundamental.

DEFINICION. El n-espacio proyectovo $\mathbb{P}^n$ es el espacio que se obtiene de $\mathbb{S}^n$ mediante la identificación de cada punto x de $\mathbb{S}^n$ con su antipodal -x.

Esta definición nos permite construir una relación de equivalencia en $\mathbb{S}^n$ de la siguiente manera: Consideremos al mapeo $p: \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ que manda cada punto x en su clase de equivalencia, con este mapeo definimos una topologia en $\mathbb{P}^n$ de la siguiente forma: Un subconjunto V de $\mathbb{P}^n$ será abierto en $\mathbb{P}^n$ si y solo si $p^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{S}^n$.

TEOREMA 7.3. El n-espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una superficie y el mapeo $p: \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ es un mapeo de recubrimiento.

Dem.: Primero probaremos que el mapeo p es abierto.

Sea U un abierto en $\mathbb{S}^n$. Consideremos el mapeo $a: \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ dado por $a(x)=-x$, este mapeo se conoce como el mapeo antipoda y es un homomeorfismo de $\mathbb{S}^n$. Entonces a(U) es abierto en $\mathbb{S}^n$. Además, el conjunto $p^{-1}(p(U))$ es abierto en $\mathbb{S}^n$, pues:

$$p^{-1}(p(U))=U \cup a(U)$$

y, por definición, $p(U)$ es abierto en $\mathbb{P}^n$.

Ahora probamos que p es un mapeo de recubrimiento. Tomemos un punto y de $\mathbb{P}^n$ y escojamos $x \in p^{-1}(y)$. Luego, tomemos una vecindad de radio ε, U, de x en $\mathbb{S}^n$, para algun $\varepsilon<1$, con la métrica euclideana d de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces U no contiene a ninguna pareja $\{z, a(z)\}$ de puntos antipodales de $\mathbb{S}^n$, pues $d(z, a(z))=2$. Así obtenemos que el mapeo

$$p: U \longrightarrow p(U)$$

es biyectivo. Además es continuo y abierto, y entonces es un homeomorfismo. Un razonamiento similar muestra que

$$p: a(U) \longrightarrow p(a(U))=p(U)$$

es un homeomorfismo. Así, el conjunto $p^{-1}(p(U))$ es la unión de los dos conjuntos abiertos U y a(U), cada uno de los cuales es mapeado homeomorficamente por p en $p(U)$.

Entonces $p(U)$ es una vecindad de $p(x)=y$ que esta uniformemente recubierta por p. Por lo tanto p es un mapeo de recubrimiento.

Dado que $\mathbb{S}^n$ tiene una base enumerable $\{U_m\}$, el espacio $\mathbb{P}^n$ tiene una base enumerable $\{p(U_m)\}$.

Sean y_1, y_2 dos puntos de $\mathbb{P}^n$. El conjunto $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2)$ esta formado por 4 puntos; sea 2ε la distancia minima entre ellos. Sean U_1 la vecindad de radio ε de uno de los puntos de $p^{-1}(y_1)$ y U_2 la vecindad de radio ε de uno de los puntos de $p^{-1}(y_2)$. Entonces:

$$[U_1 \cup a(U_1)] \cap [U_2 \cup a(U_2)] = \phi.$$

Se sigue que $p(U_1)$ y $p(U_2)$ son vecindades disjuntas de y_1 y y_2, respectivamente. en $\mathbb{P}^n$. Por lo tanto $\mathbb{P}^n$ es Hausdorff.

Dado que $\mathbb{S}^n$ es una superficie y que cualquier punto de $\mathbb{P}^n$ tiene una vecindad homeomorfa con un subconjunto abierto de $\mathbb{S}^n$, el espacio $\mathbb{P}^n$ es tambien una superficie. □

COROLARIO 7.4. Para $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{P}^n, y)$ es un grupo de orden 2.

Dem.: El mapeo de proyección $p: \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ es un mapeo de recubrimiento. Como $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo, podemos aplicar el teorema 4.5, el cual nos asegura que existe una biyección entre $\pi_1(\mathbb{P}^n, y)$ y el conjunto $p^{-1}(y)$. Dado que $p^{-1}(y)$ tiene solamente dos elementos, $\pi_1(\mathbb{P}^n, y)$ es un grupo de orden 2, y como ya es conocido, todo grupo de orden 2 es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, los enteros modulo 2. □

COROLARIO 7.5. Las superficies $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{T}$ son topologicamente distintas.

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER PARA EL DISCO

En esta ultima sección probaremos el Teorema del punto fijo de Brouwer para el disco. Esta demostración la haremos usando nuestros conocimientos de las retraciones y del grupo fundamental. Primero necesitamos probar la siguiente proposición.

PROPOSICION. No existe una retracción $r:\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, del disco $\mathbb{D}^2$ en el circulo $\mathbb{S}^1$.

Dem.: Supongamos que existe una retracción $r:\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, entonces el mapeo r restringido a $\mathbb{S}^1$ sera la identidad en $\mathbb{S}^1$, esto es:

$$r|_{\mathbb{S}^1}(s)=s$$

Ahora tomando el mapeo de inclución $j:\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ tenemos que:

$$r\circ j:\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

es el mapeo identidad en $\mathbb{S}^1$, esto es $r\circ j=i$. Así, usando las propiedades del homomorfismo inducido, tenemos que:

$$(r\circ j)_*=r_*\circ j_*$$

donde

$$j_*:\pi_1(\mathbb{S}^1,x) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{D}^2,x)$$
$$r_*:\pi_1(\mathbb{D}^2,x) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1,x)$$

y $(r\circ j)_*:\pi_1(\mathbb{S}^1,x) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1,x)$ es el homomorfismo identidad.

Como se recordara, en el ejemplo 2 de la segunda sección se demostro que $\pi_1(\mathbb{D}^2,x)$ era el grupo con un solo elemento. Luego, r_* es el homomorfismo cero, y entonces $r_*\circ j_*$ es el homomorfismo cero, lo cual contradice lo afirmado anteriormente, si se toma en cuenta que $\mathbb{S}^1$ tiene un grupo fundamental ciclico infinito.

Por lo tanto no existe tal mapeo r.

TEOREMA. **(Teorema del punto fijo de Brouwer para el disco.)** Si $f:\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ es un mapeo continuo, entonces existe un punto $x \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(x)=x$.

Dem.: Supongamos $f:\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ es un mapeo continuo tal que

$$f(x) \neq x \quad \forall\ x \in \mathbb{D}^2.$$

Definamos ahora $r:\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ como sigue: dado $x \in \mathbb{D}^2$ sea $r(x)$ el punto donde el rayo dirigido

$$\{tx + (1-t)f(x) \mid t \geq 0\}$$

de $f(x)$ a x intersecta a $\mathbb{S}^1$. Lo que necesitamos para poder determinar el punto de intersección es encontrar el valor de t en la ecuación:

$$\|tx + (1-t)f(x)\|^2 = 1$$

la cual se transforma facilmente a la expre~~c~~sión:

$$t = \frac{-2(x-f(x))\cdot f(x) \pm \sqrt{4[(x-f(x)\cdot f(x)]^2 - 4\|x-f(x)\|^2(\|f(x)\|^2-1)}}{2\|x-f(x)\|^2}.$$

Mediante una inspección rápida observamos que $t \geq 0$ cuando el signo del radical es positivo. Entonces $r(x)$ queda definido como

$$r(x) = tx + (1-t)f(x)$$

donde

$$t = \frac{-2(x-f(x))\cdot f(x) + \sqrt{4[(x-f(x)\cdot f(x)]^2 - 4\|x-f(x)\|^2(\|f(x)\|^2-1)}}{2\|x-f(x)\|^2}$$

Más aun, r definida de esta forma resulta ser continua ya que $x-f(x) \neq 0$ por hipotesis. Pero $r|_{\mathbb{S}^1}$ es el mapeo identidad en $\mathbb{S}^1$ y entonces r resulta ser una retracción de $\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{S}^1$ lo cual contradice a la proposicion anterior. Entonces si $f:\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ es un mapeo continuo existe un punto $x \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(x)=x$.

B I B L I O G R A F I A .

TITULO: Topology a first course.
AUTOR: R. James Munkres.

TITULO: General Topology.
AUTOR: Sze Tsen Hu.

TITULO: Topology.
AUTOR: John G. Hocking.
Gail S. Young.