UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

APLICACION DEL METODO DE OGBORN EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO-LINEALES Y EN LA ENSEÑANZA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADA EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

GLORIA AZUCENA TAMEZ VILLALON

ASESOR : DR. BERNABE L. RODRIGUEZ B.

MONTERREY, N.L. SEPTIEMBRE DE 1992

A MIS PADRES :

Ismael Tamez Cavazos
Gloria Aurora Villalon de T.

Quienes siempre me han brindado con amor, todo el apoyo para superarme.

A MI ESPOSO :

Ricardo Alanis Cepeda

Quien me ha brindado su entusiasmo y gran parte de su tiempo en la realizacion de este trabajo.

RECONOCIMIENTOS.

Quiero expresar mi entero agradecimiento al Dr. Bernabé L. Rodríguez Buenrostro por su enorme colaboración al brindarme gran parte de su tiempo y su interés en la realización de este trabajo. Agradezco también a la División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ciencias Físico-Matamáticas por todas las facilidades que me otorgaron.

C O N T E N I D O

INTRODUCCION

El estudio de las ecuaciones diferenciales en el nivel superior del sistema educativo nacional se inicia normalmente después de concluir el ciclo básico de cursos de Cálculo Diferencial e Integral. En una primera etapa se presentan los temas relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir de una variable, lineales y por lo general hasta de orden 2 y con coeficientes variables, limitándose el estudio a los casos que tienen solución analítica y eventualmente se incluyen casos cuya solución implica métodos numéricos. En las siguientes etapas se incluyen las ecuaciones diferenciales parciales de orden 2 y además lineales. El tratamiento de las ecuaciones diferenciales no-lineales se presenta por lo general a nivel de postgrado.

Las principales razones que justificaron éste tipo de dasarrollo son escencialmente de carácter histórico debido a la gran variedad de problemas que se presentan en otras áreas del conocimiento como son: Física, Química, Biología y las Ingenierías. Por otro lado, la no existencia de instrumentos que permitan el empleo de métodos numéricos obligó a que el estudio de las ecuaciones diferenciales no-lineales se tratara practicamente en el nivel de postgrado.

El enorme avance tecnológico y reducción de costos logrado en el desarrollo de las computadoras personales, permite hoy en día que los estudiantes del nivel medio superior y superior tengan acceso a este tipo de dispositivos, motivando por consecuencia, el acceso a temas del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias que anteriormente no se podían cubrir. Esto trajo a su vez, como consecuencia, que se desarrollaran nuevos métodos y técnicas didácticas, como lo es el método de J. Ogborn para la solución de problemas en las ciencias naturales que normalmente requerían del uso de las ecuaciones diferenciales.

El objetivo principal del presente trabajo consiste en mostrar la aplicabilidad del método de J. Ogborn en la solución de algunas ecuaciones diferenciales no-lineales de una variable en las ciencias naturales, así como su inclusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el capítulo I se presentan las soluciones analíticas de una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden 2 que tiene una amplia gama de aplicaciones y que a su vez permite ser la base de comparación entre las soluciones numéricas y las exactas.

A continuación en el capítulo II se analiza el método numérico propuesto por J. Ogborn.

La aplicación del método de J. Ogborn para resolver ecuaciones diferenciales simples no-lineales así como el método de ajuste para una solución en serie de potencias se encuentra en el capítulo III.

En el capítulo IV se presentan las respectivas conclusiones y comentarios.

Al final del capítulo IV se listan las referencias bibliográficas pertinentes.

C A P I T U L O I

ECUACIONES DIFERENCIALES SIMPLES DE ORDEN DOS

Entendemos por "Ecuación Diferencial Simple de Orden Dos" a una ecuación del siguiente tipo:

$$A\frac{d^2f(t)}{dt^2} + B\frac{df(t)}{dt} + Cf(t) = 0 \qquad (1.1)$$

Donde A,B y C son constantes, $\frac{df}{dt}$ denota la primera derivada y $\frac{df^2}{dt^2}$ la segunda derivada , cuya solución general se obtiene [REF. 1] probando con una solución de la forma $f(t)=e^{rt}$, y sustituyendo $\frac{df(t)}{dt} = re^{rt}$ y $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = r^2e^{rt}$, la ecuación se transforma en :

$$Ar^2e^{rt} + Bre^{rt} + Ce^{rt} = 0$$

ó

$$e^{rt}\ [Ar^2 + Br + C] = 0$$

Como e^{rt} nunca se anula para valores reales y finitos de t, es evidente que la única manera de que ésta función exponencial pueda satisfacer la ecuación diferencial, es eligiendo r, de tal manera que sea una raíz de la ecuación cuadrática:

$$Ar^2 + Br + C = 0 \qquad (1.2)$$

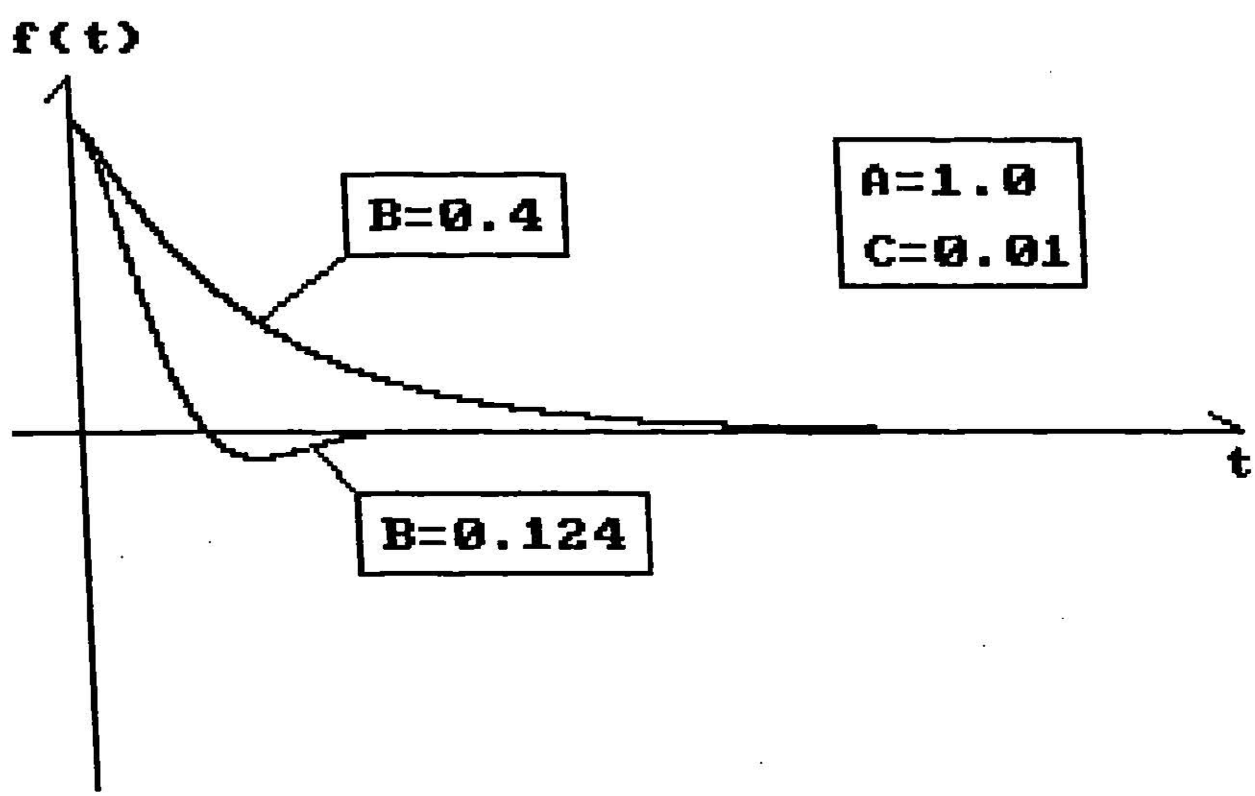
Esta ecuación es llamada ecuación auxiliar ó característica de la ecuación diferencial (1.1).

En la solución de la ecuacion (1.2) se presentan tres casos distintos (según la ecuación auxiliar tenga raices reales distintas, raices reales iguales ó raices complejas conjugadas).

CASO I .- Cuando las raices de la ecuación auxiliar son reales y distintas $r_1 \neq r_2$, se obtienen dos soluciones de la forma : $f_1(t) = e^{r_1 t}$ y $f_2(t) = e^{r_2 t}$ que, como son linealmente independientes, conducen a la solución general :

$$f(t) = C_1 e^{-\gamma t} \operatorname{senh}(\mu t + C_2)$$

donde $\gamma = B/2A$ y $\mu = \{\gamma^2-(C/A)\}^{1/2}$, [REF. 2]. A continuación se presenta una gráfica de dos soluciones típicas de este caso.

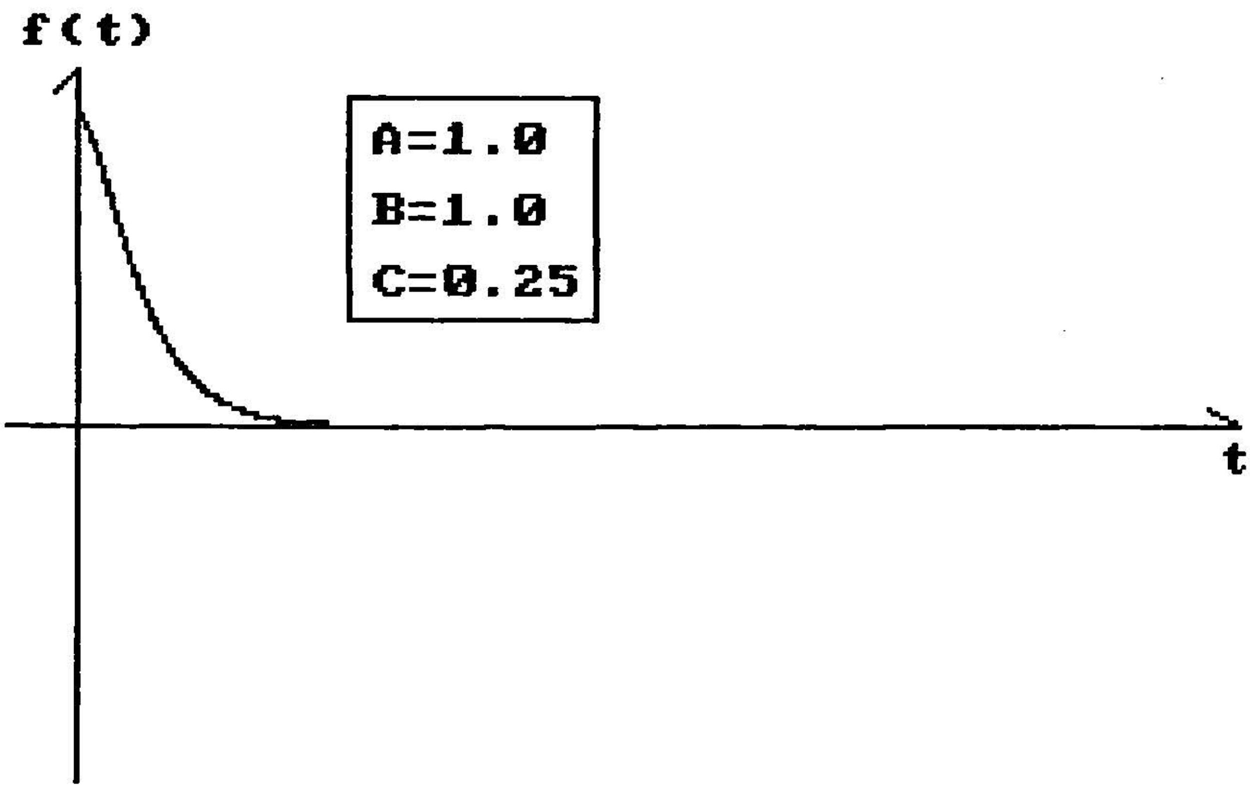


GRAFICA 1.1

CASO II .- Cuando las raíces de la ecuación auxiliar son reales e iguales $r_1 = r_2 = r$, se encuentra que la solución general es de la forma:

$$f(t) = [C_1 + C_2 t]e^{rt}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Una gráfica típica de este caso es la siguiente :



GRAFICA 1.2

CASO III .- Cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas de la forma : $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, con α y β reales, la solución es :

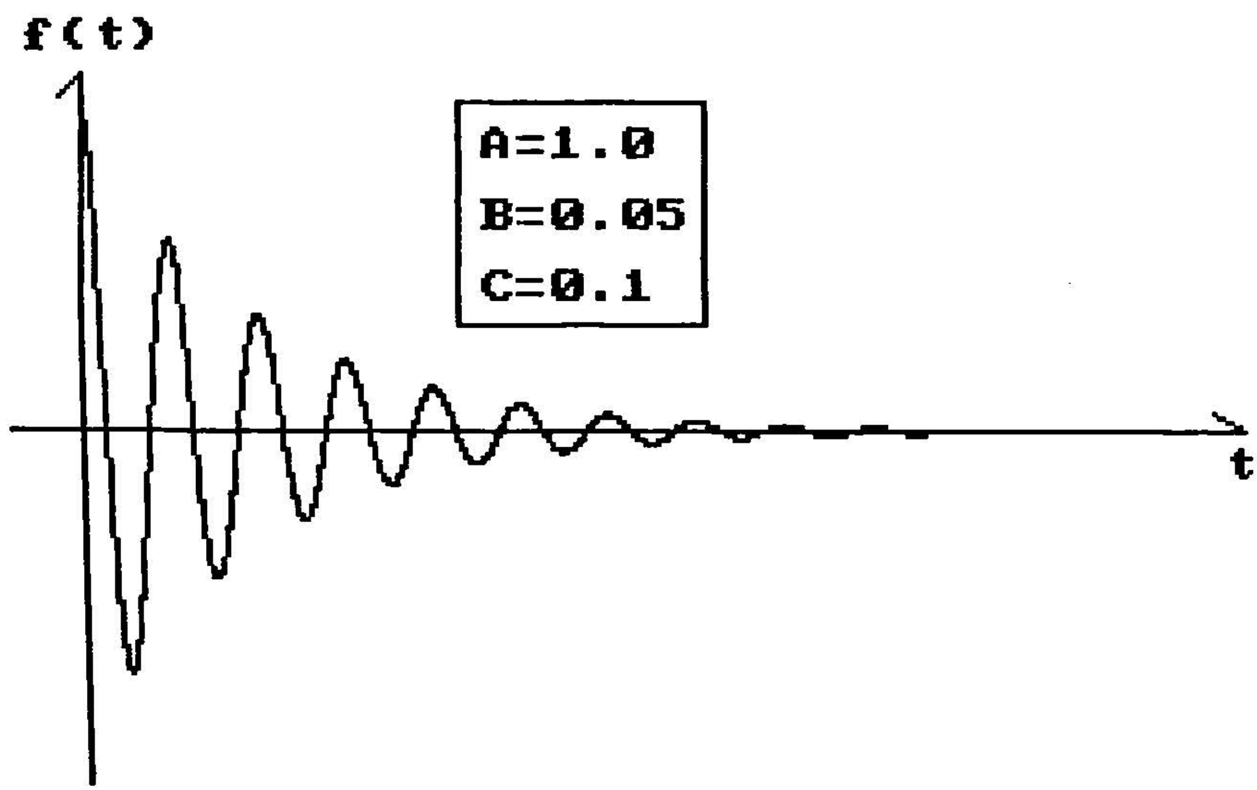
$$f(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} .$$

la cual se puede transformar a la siguiente forma :

$$f(t) = C_1 e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega_1 t + C_2)$$

donde C_1 y C_2 son constantes, $\gamma = B/2A$, y $\omega_1 = \{(C/A) - \gamma^2\}^{1/2}$

En la siguiente gráfica se presenta una solución típica de este caso.



GRAFICA 1.3

La ecuación diferencial (1.1) tiene una gran cantidad de aplicaciones en las ciencias naturales y en las ingenierías, pues está relacionada con problemas de movimientos oscilatorios, como son los casos del movimiento armónico simple, el oscilador armónico amortiguado, el péndulo simple, de torsión y físico, vibraciones en torno a puntos de equilibrio, etc. Estas aplicaciones de la ecuación implican necesariamente, que los problemas físicos planteados también sean de carácter lineal.

C A P I T U L O   I I

EL METODO NUMERICO

Como se mencionó en la introducción, las ecuaciones diferenciales ordinarias fueron muy utilizadas en la solución de problemas relacionados con modelos lineales, los cuales correspondieron a una primera aproximación de la gran variedad de aplicaciones. El continuo avance de la ciencia alcanza hoy en día muchos casos que van mas allá de los modelos lineales. Un ejemplo representativo de esta situación se tiene en la ecuación diferencial del siguiente tipo:

$$A\ddot{Y}(t) + B[\dot{Y}(t)]^S + C[Y(t)]^N = 0 \qquad (2.1)$$

donde A, B y C son constantes reales, S y N son constantes positivas ó cero, y cada punto sobre la función denota el orden de la derivada.

Una ecuación de éste tipo la denominaremos "Ecuación diferencial simple no-lineal(*)". Existen en la actualidad métodos numéricos con los cuales se puede resolver esta ecuación, como por ejemplo el clásico método de Runge-Kutta [REF. 3]. Dichos métodos son tema de enseñanza y aprendizaje posterior a los cursos formales de Cálculo Diferencial e Integral a nivel de facultad.

(*) Es frecuente encontrar en la literatura la palabra "alineal" como sinónimo de "no-lineal".

En el congreso internacional sobre el uso de las microcomputadoras en la educación de las ciencias [REF. 4], J. Ogborn propuso un método que se puede incluir desde el nivel medio superior del proceso educativo.

El método iterativo propuesto por Ogborn, consiste en las siguientes etapas:

1.- Con las condiciones iniciales $Y(0)$, $\dot{Y}(0)$ y $t(0)$ se calcula $\ddot{Y}(0)$ de la ecuación (2.1).

2.- Dado un incremento Δt se calcula:

$$\dot{Y}(t + \Delta t) = \dot{Y}(t) + \ddot{Y}(t)\, \Delta t$$

3.- Ahora se calcula:

$$Y(t + \Delta t) = Y(t) + \dot{Y}(t + \Delta t)\, \Delta t$$

4.- Estos nuevos valores de Y y $\dot{Y}$ se toman como las nuevas condiciones iniciales y se repite el proceso.

Este método depende sensiblemente del valor que se tome para Δt, por lo que se recomienda: primero resolver la ecuación correspondiente al caso lineal, y obtener así una estimación para Δt, y segundo disminuir gradualmente este valor, conforme se aparte del caso lineal.

La verificación de este algoritmo se llevó a cabo para el caso del oscilador armónico amortiguado, cuya ecuación diferencial es de la forma:

$$M\ddot{Y}(t) + B\dot{Y}(t) + KY(t) = 0 \qquad (2.2)$$

Las soluciones analíticas de (2.2) se analizaron en el capítulo I.

Estas soluciones se compararon con las obtenidas empleando el método de Ogborn para diferentes valores de Δt, encontrándose una excelente concordancia entre ambas para valores de $\Delta t < 0.1$ seg., especialmente en lo que se refiere al cálculo del periodo, donde las diferencias relevantes entre la solución analítica y la numérica se presentan solo en el primer cuarto de ciclo, siendo del orden de : $\delta \approx 0.004$ seg.

C A P I T U L O III

APLICACION DEL METODO DE J. OGBORN

3.1 APLICACION DEL METODO NUMERICO DE J. OGBORN.

En la ecuación (2.1), el análisis del caso con $S \geq 0$ y $N=1$, fué analizado por Rodríguez y Vallejo [Ref.5].

En nuestro caso analizaremos una ecuación diferencial simple no-lineal del siguiente tipo(*):

$$M\ddot{Y}(t) + B\dot{Y}(t) + K(Y(t))^N = 0 \qquad \text{con} \quad N \geq 0$$

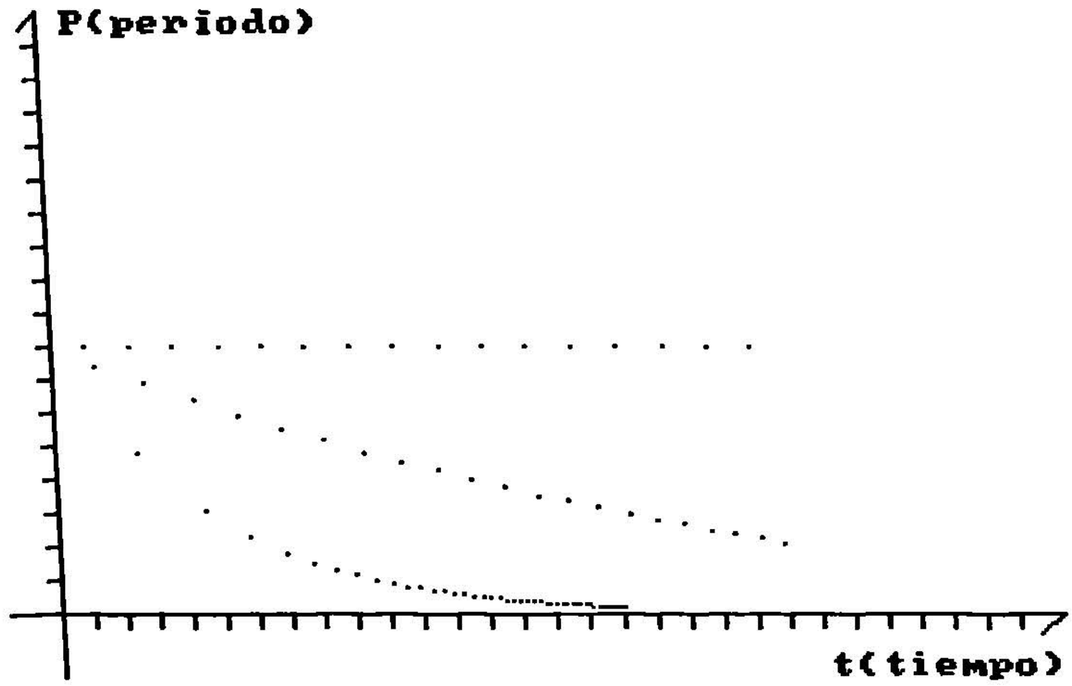
Un primer análisis de este caso se dá en la Ref. 6, de donde se concluyó que la dependencia temporal de la frecuencia se puede expresar por una serie de potencias del siguiente tipo:

$$F(t) = F_o EXP(C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + \ldots.) \qquad (3.1)$$

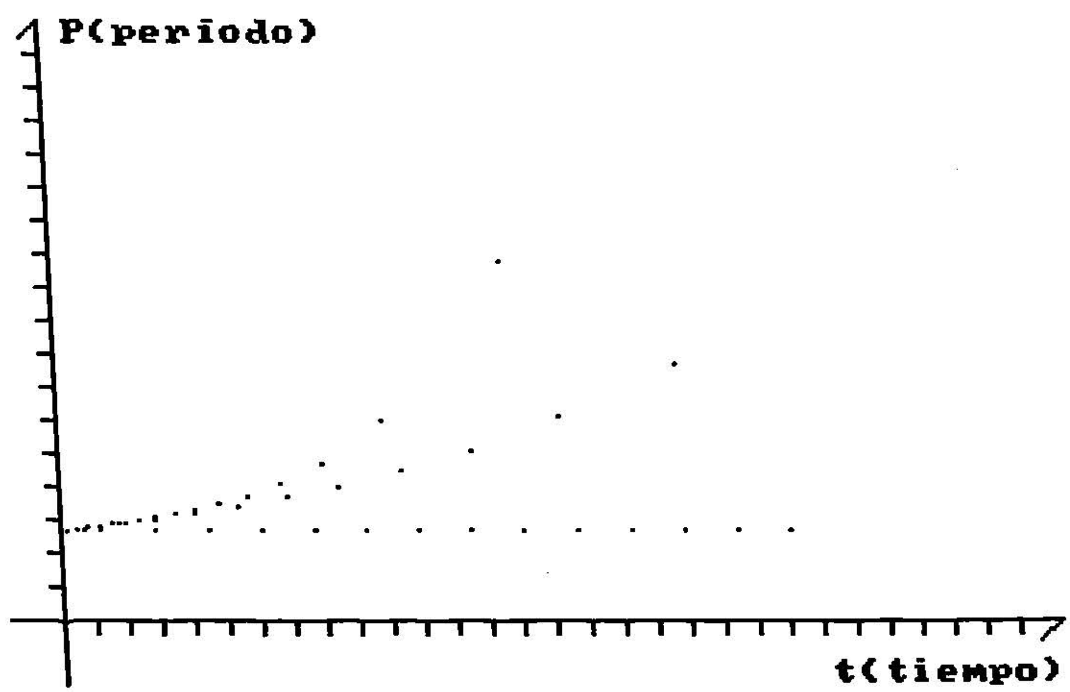
donde F_o representa la frecuencia del oscilador armónico clásico (amortiguado y lineal).

Utilizando el método de Ogborn se resolvió esta ecuación diferencial, donde el período (intervalo de tiempo requerido para efectuar una oscilación completa) se obtuvo para diferentes valores de K, B y N como se muestra en las siguientes gráficas.

(*) Esta ecuación es conocida como la ecuación del oscilador armónico amortiguado no-lineal en la fuerza restitutiva.



GRAFICA 3.1.- VARIACION DEL PERIODO PARA TRES VALORES DE N, CON $0 \leq N \leq 1$.



GRAFICA 3.2.- VARIACION DEL PERIODO PARA TRES VALORES DE N, CON $N \geq 1$.

3.2 DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION : $F(t) = F_0 EXP(C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + \ldots.)$

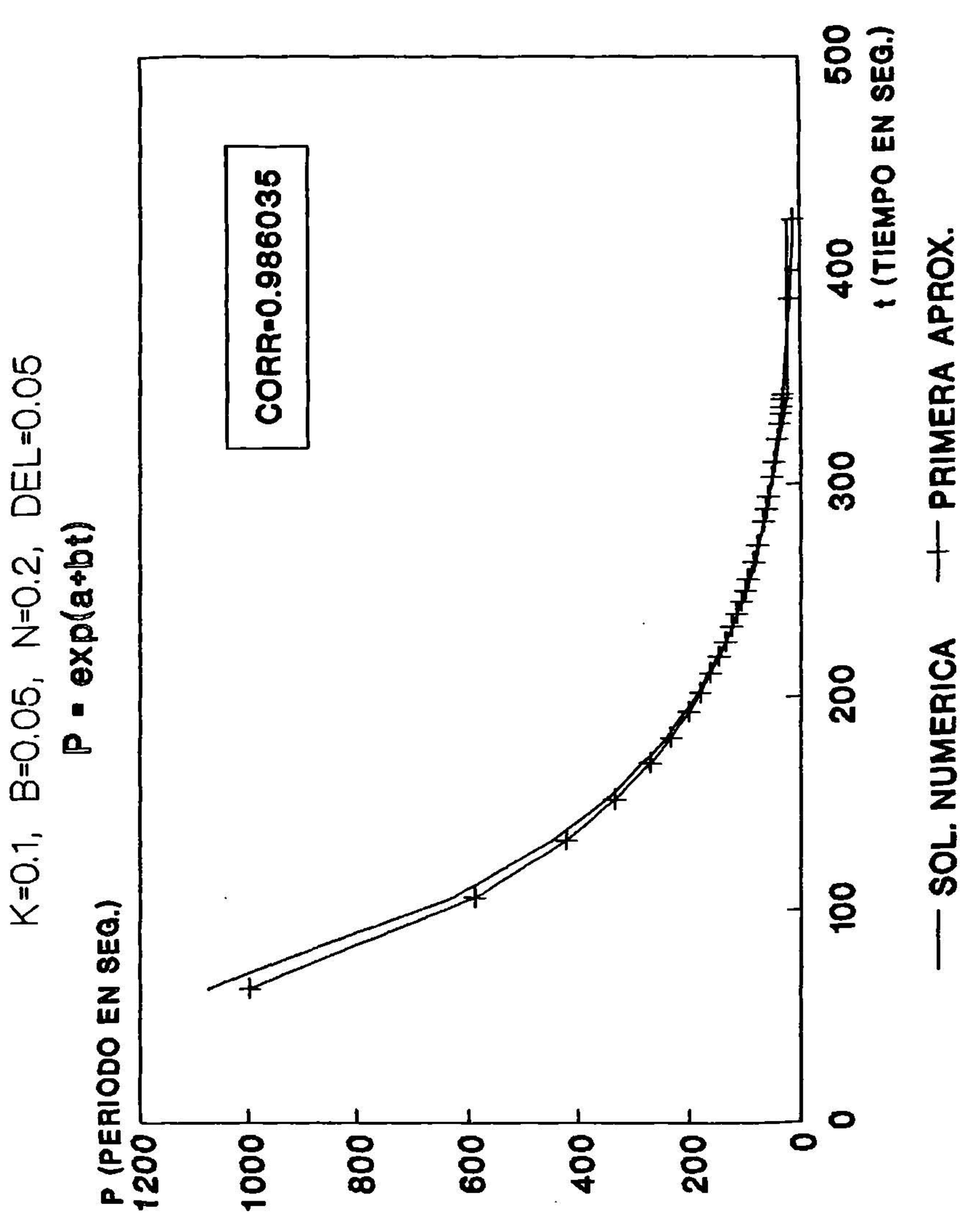
La determinación de los coeficientes se llevó a cabo de la siguiente forma:

1.- Se toma el logaritmo natural del período, resultando:

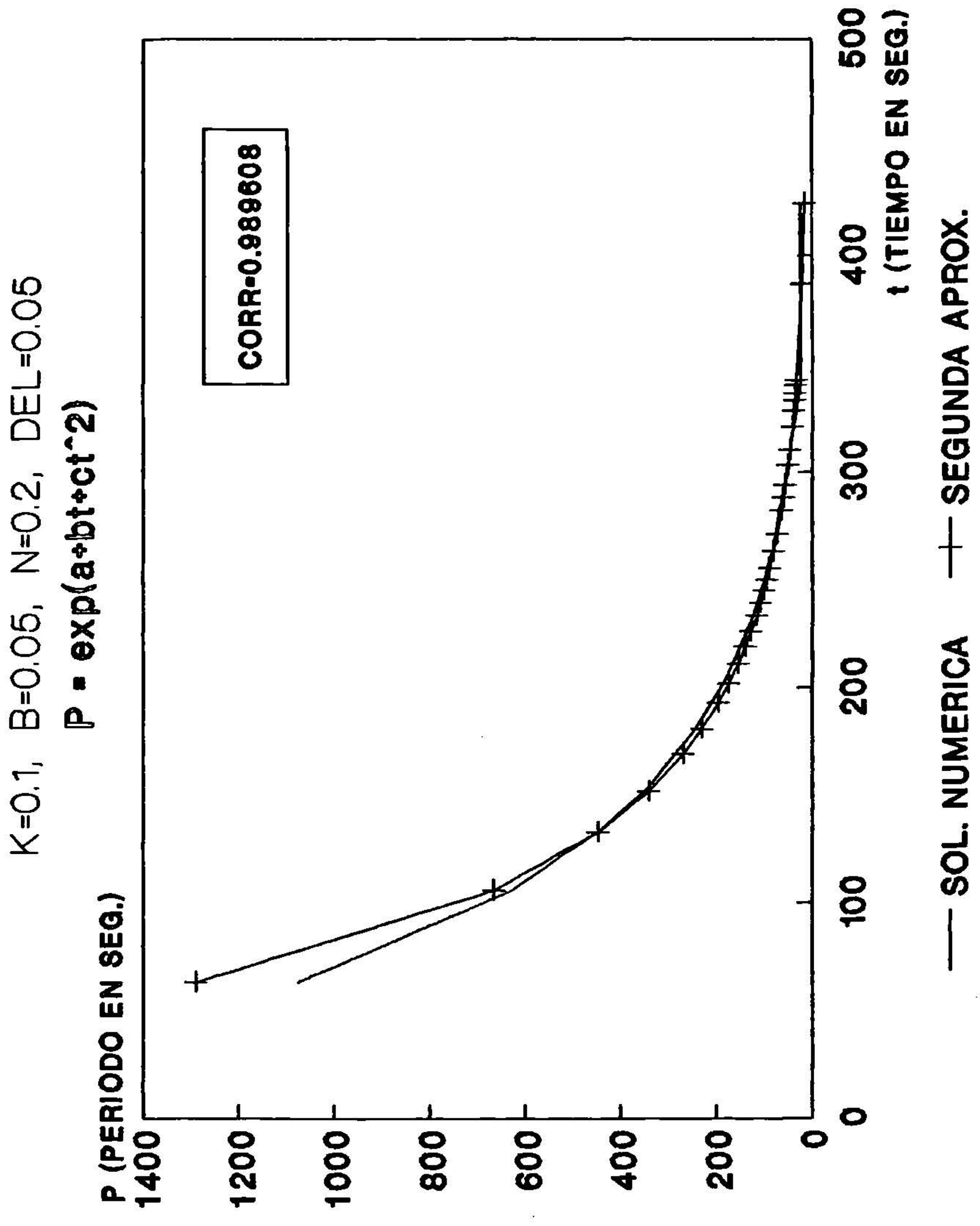
$$Ln(P) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + \ldots\ldots$$

2.- Se emplea el método de mínimos cuadrados para ajustar los coeficientes de la serie a los valores proporcionados por el método de Ogborn, lo cual se obtuvo utilizando el paquete LOTUS 123.

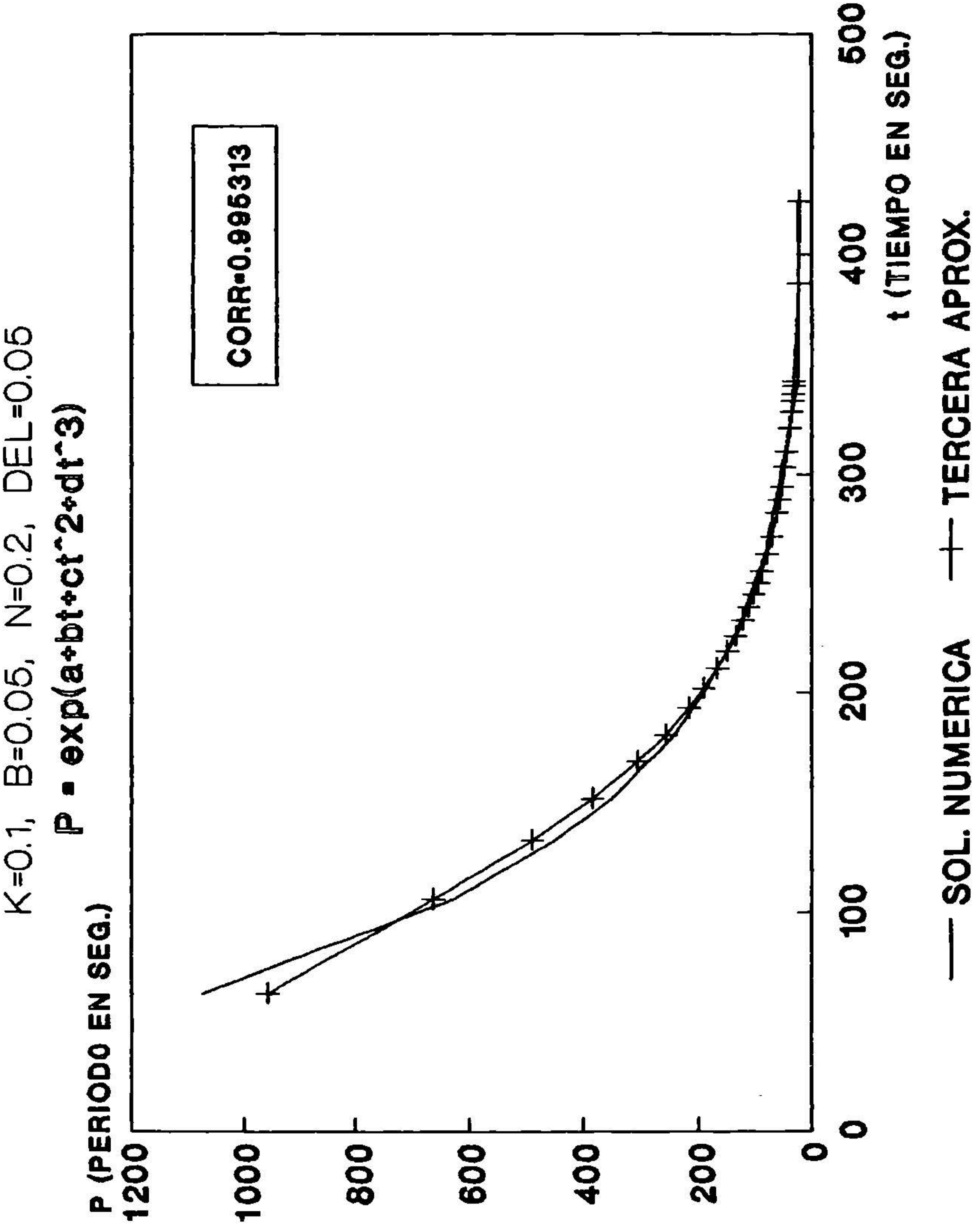
En las siguientes gráficas se muestra la mejoría de la curva propuesta al incrementar el número de componentes de la serie de potencias para algunos valores de las constantes K, B y N, así como sus respectivos coeficientes de correlación.



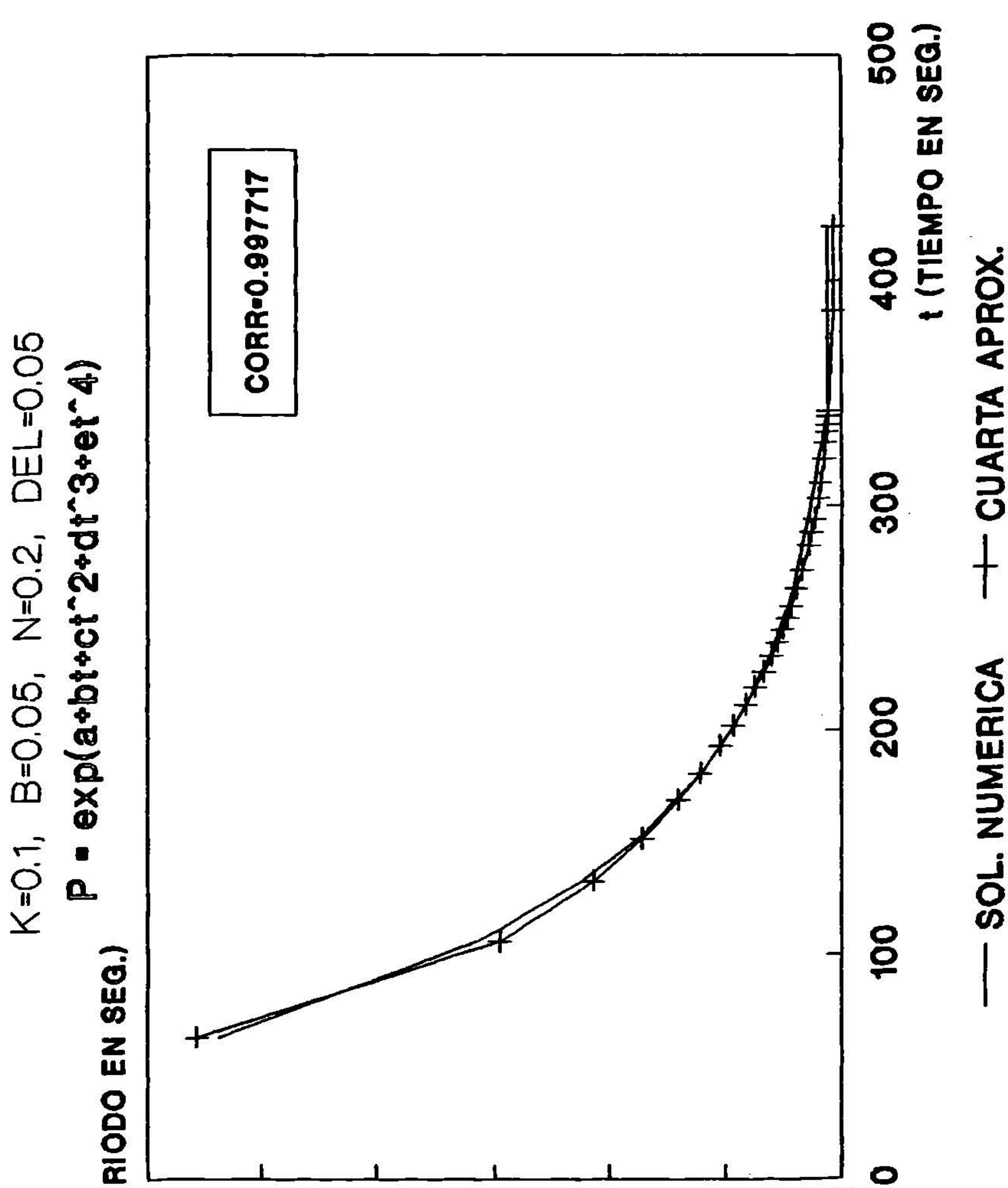
GRAFICA 3.3.-SOLUCIONES REAL Y APROXIMADA CON DOS COMPONENTES DE LA SERIE DE POTENCIAS.



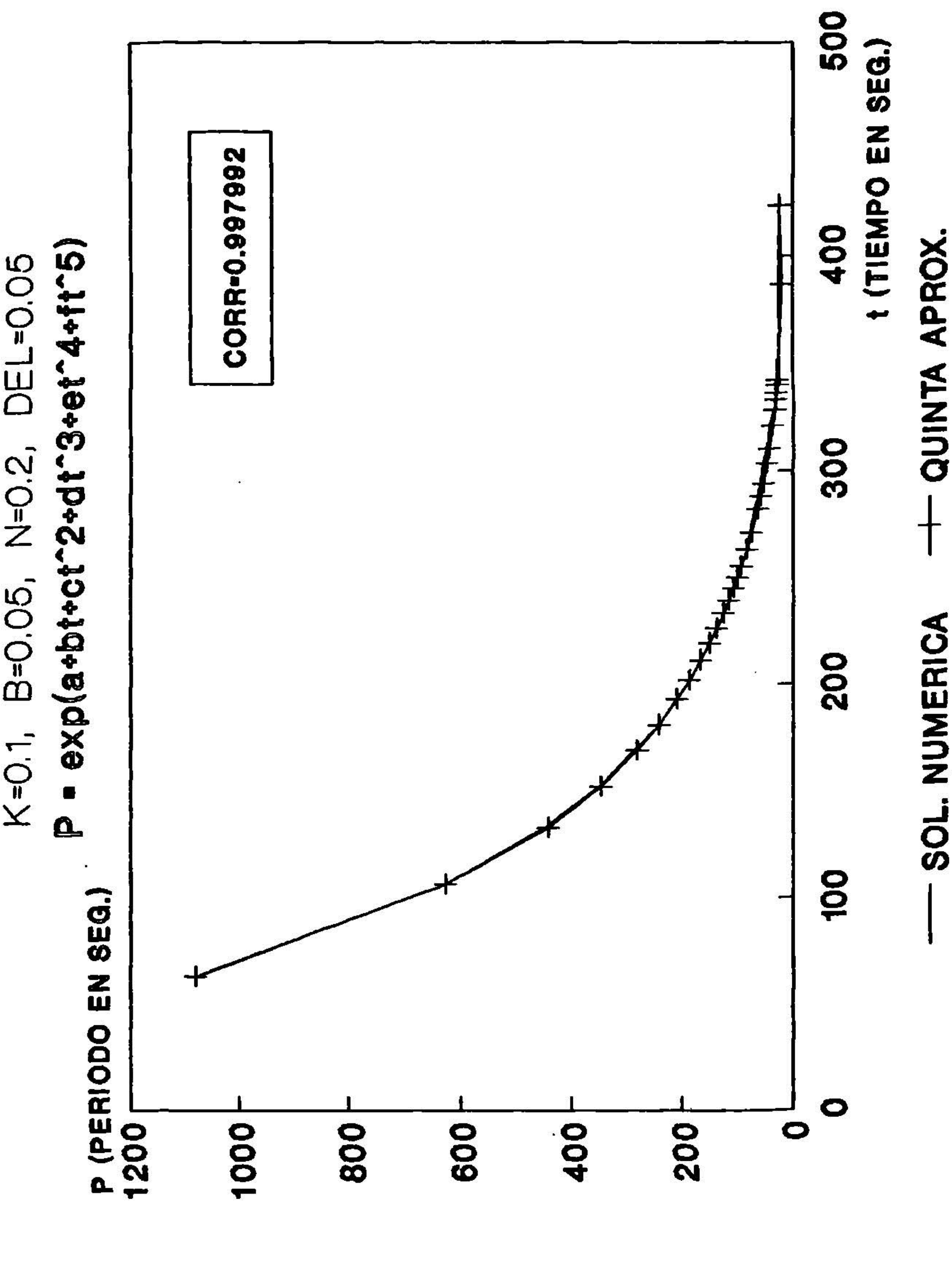
GRAFICA 3.4.-SOLUCIONES REAL Y APROXIMADA CON TRES COMPONENTES DE LA SERIE DE POTENCIAS.



GRAFICA 3.5.-SOLUCIONES REAL Y APROXIMADA CON CUATRO COMPONENTES DE LA SERIE DE POTENCIAS.

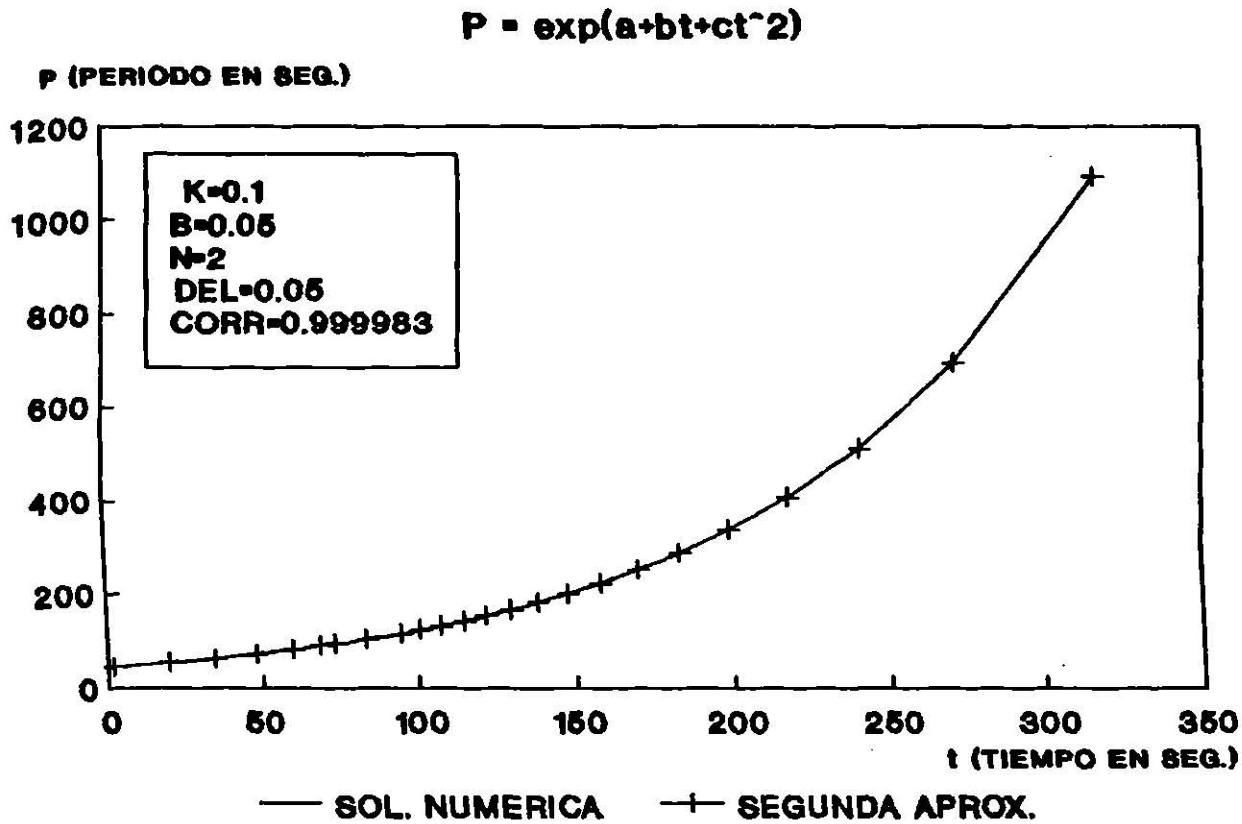


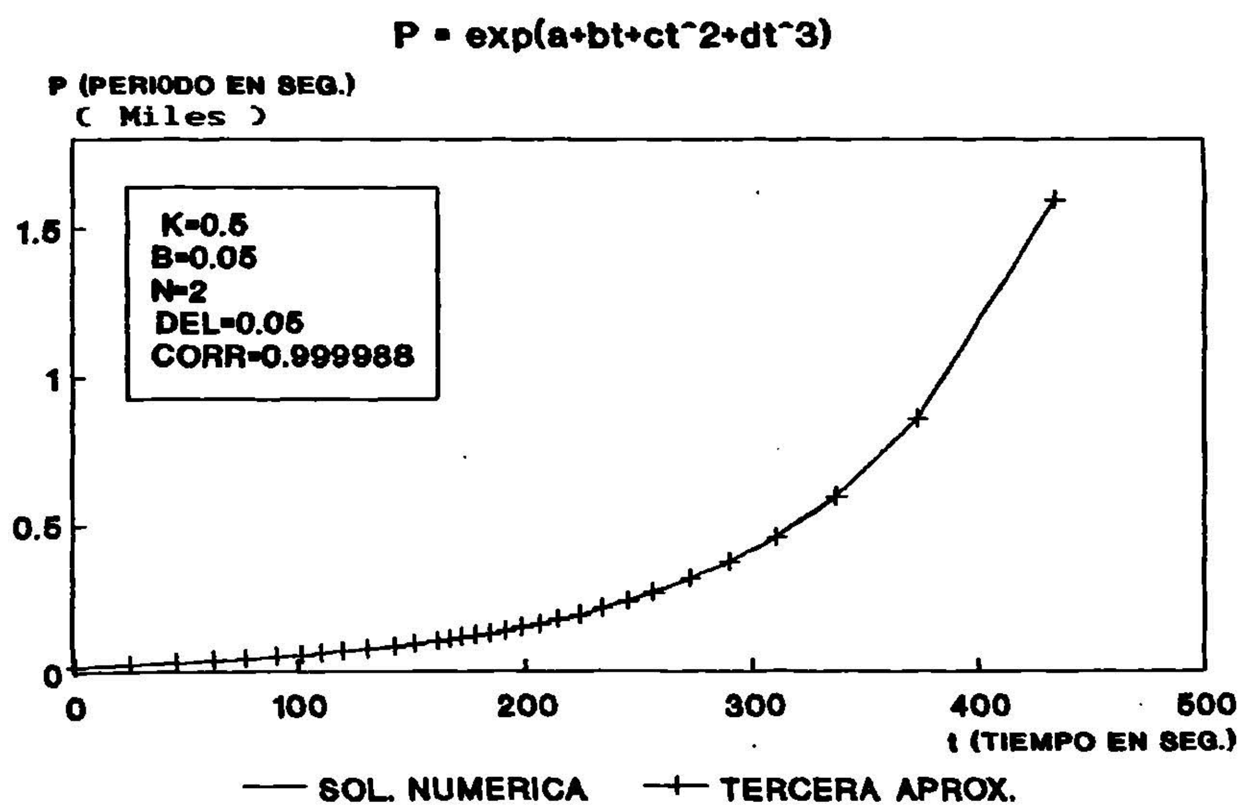
GRAFICA 3.6.-SOLUCIONES REAL Y APROXIMADA CON CINCO COMPONENTES DE LA SERIE DE POTENCIAS.

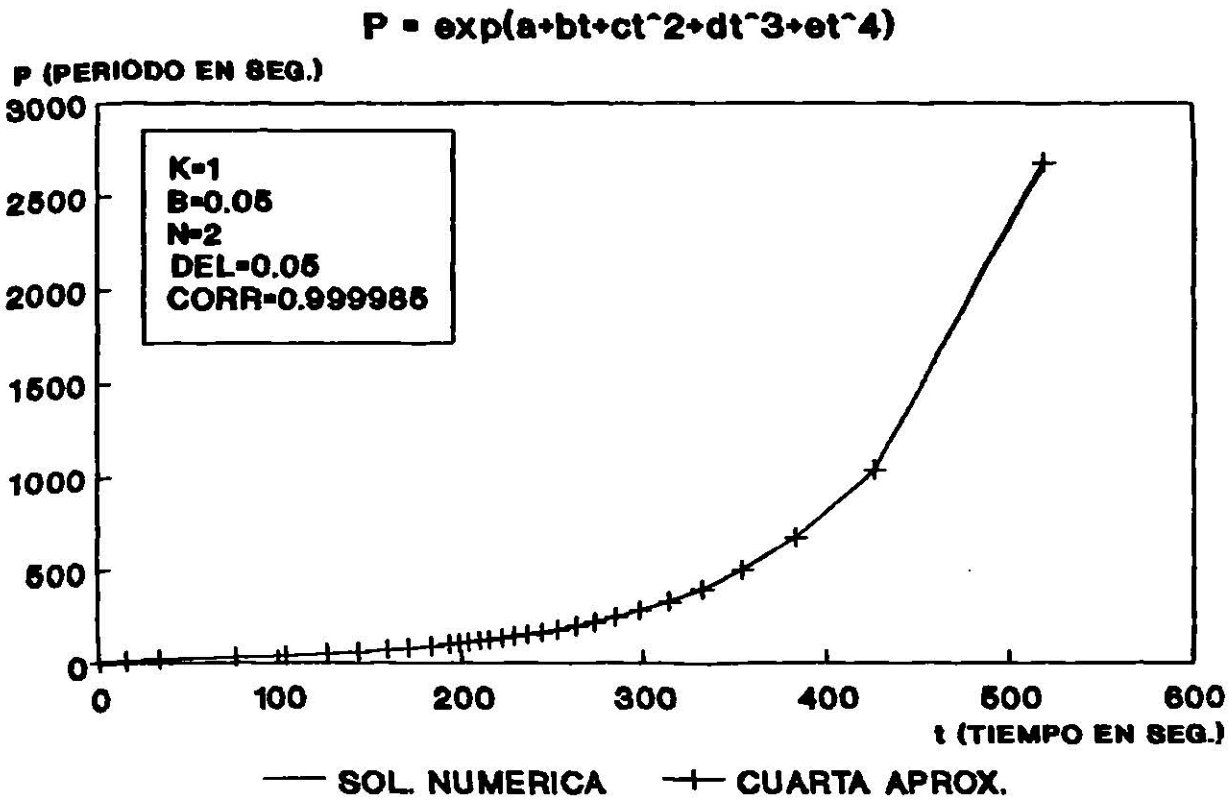


GRAFICA 3.6.-SOLUCIONES REAL Y APROXIMADA CON SEIS COMPONENTES DE LA SERIE DE POTENCIAS.

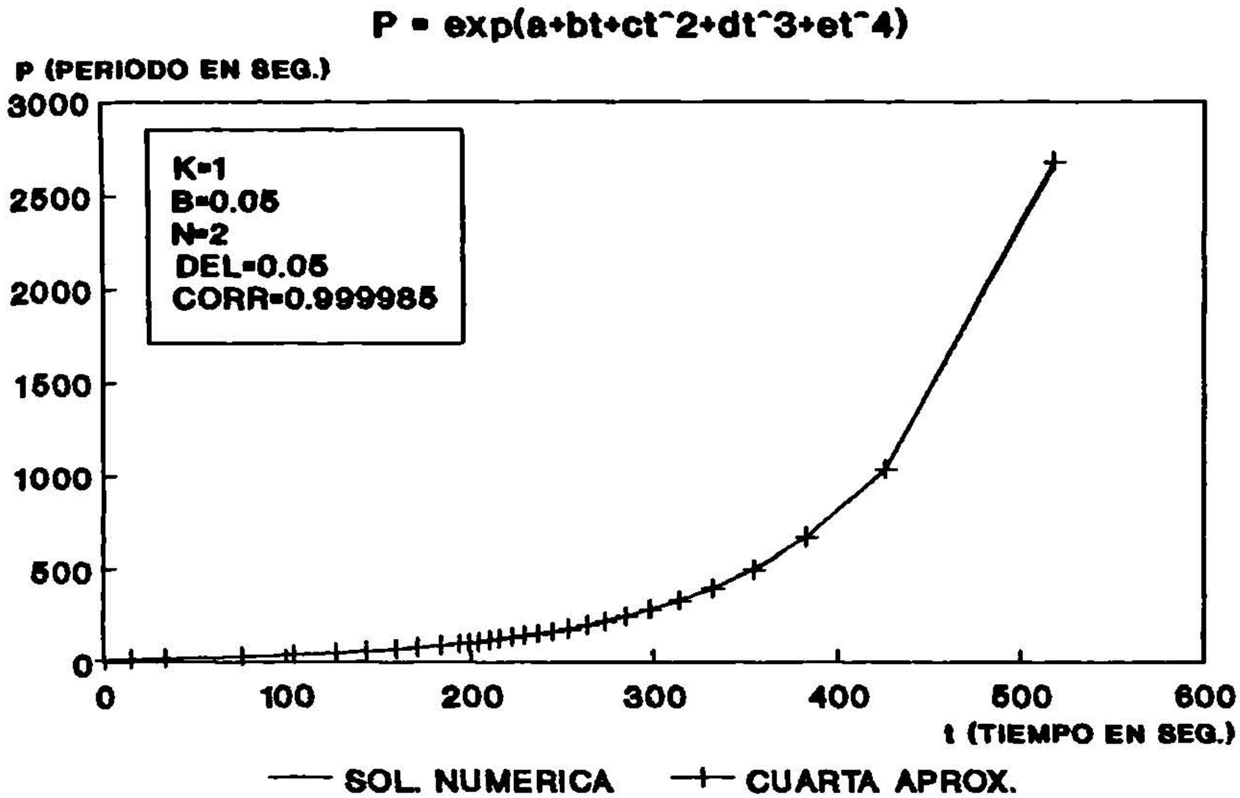
En las tres siguientes gráficas se presenta la correlación entre la solución numérica y la obtenida con la mejor aproximación segun varía K.

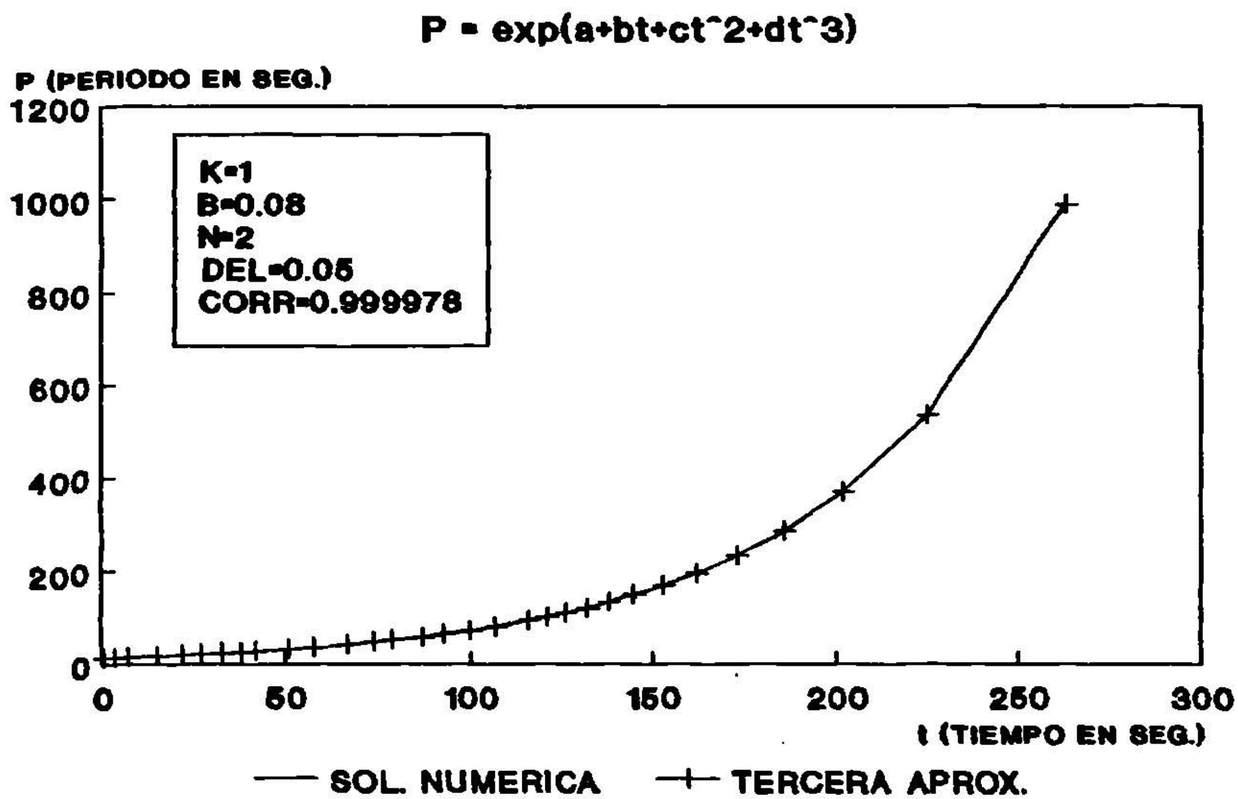


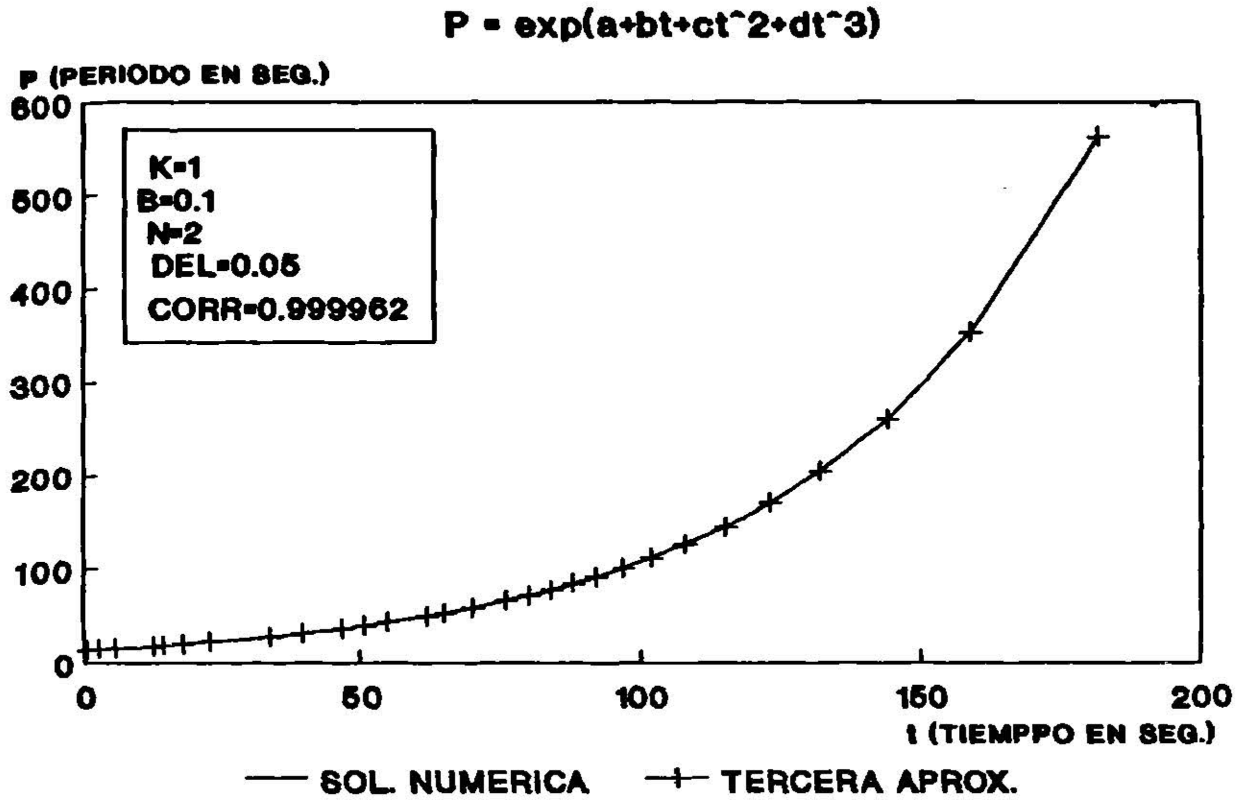



P = exp(a+bt+ct^2+dt^3+et^4)
P (PERIODO EN SEG.)
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
K=1
B=0.05
N=2
DEL=0.05
CORR=0.999985
0
100
200
300
400
500
600
t (TIEMPO EN SEG.)
SOL. NUMERICA
CUARTA APROX.

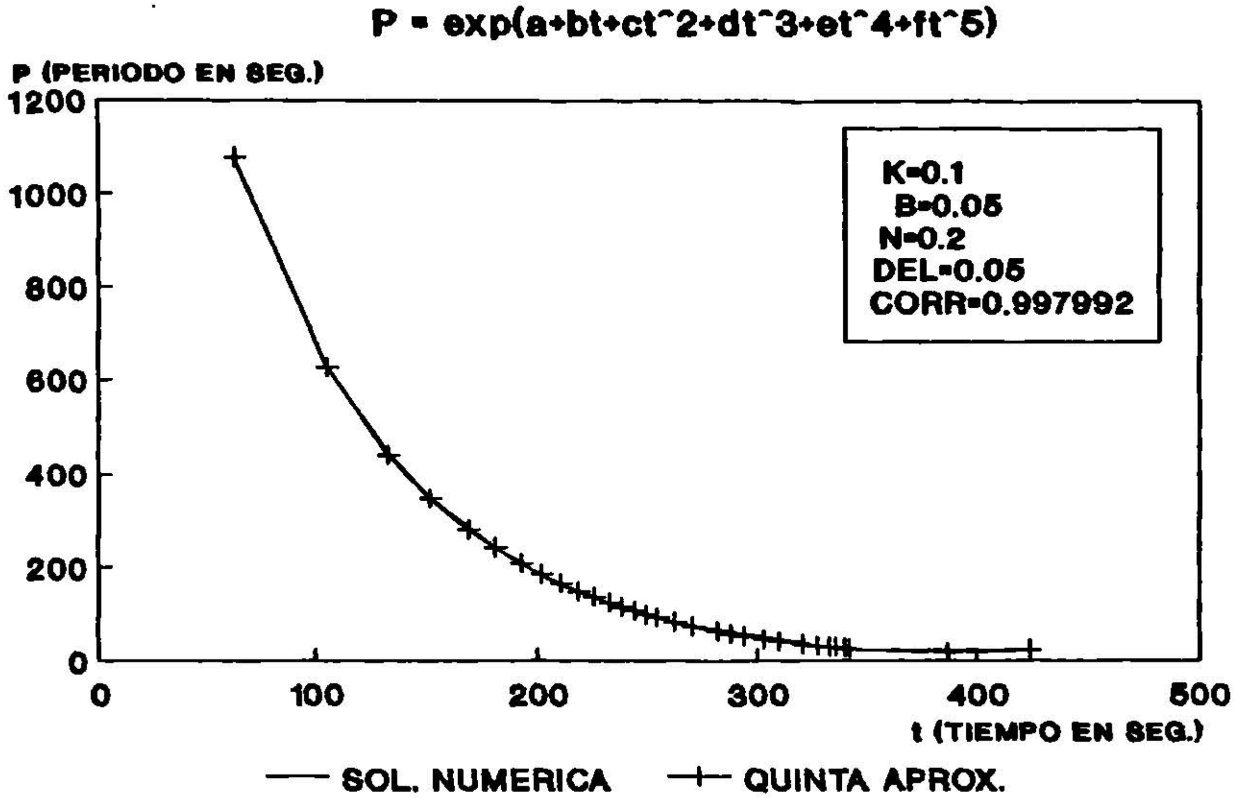
En las tres gráficas siguientes se presenta la correlación entre la solución numérica y la obtenida con la mejor aproximación según varía B.

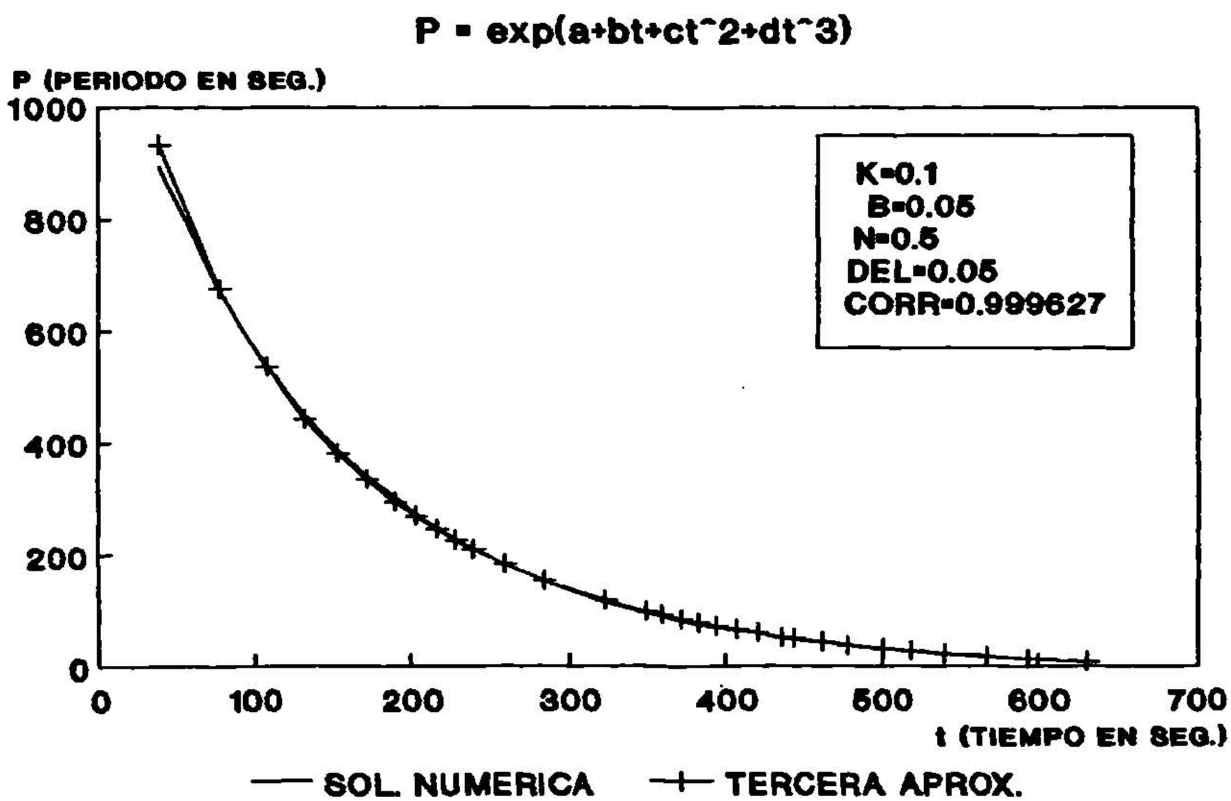


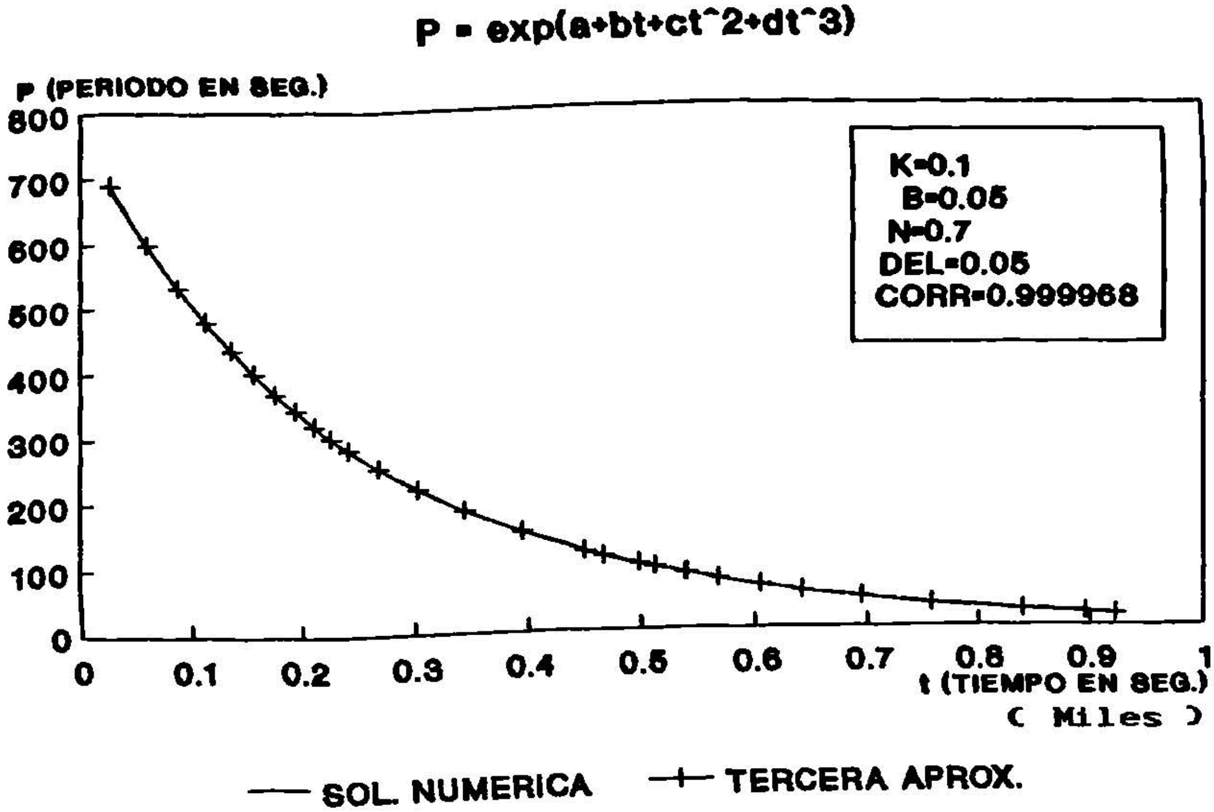



P = exp(a+bt+ct^2+dt^3)
p (PERIODO EN SEG.)
K=1
B=0.1
N=2
DEL=0.05
CORR=0.999962
600
500
400
300
200
100
0
0
50
100
150
200
t (TIEMPPO EN SEG.)
SOL. NUMERICA
TERCERA APROX.

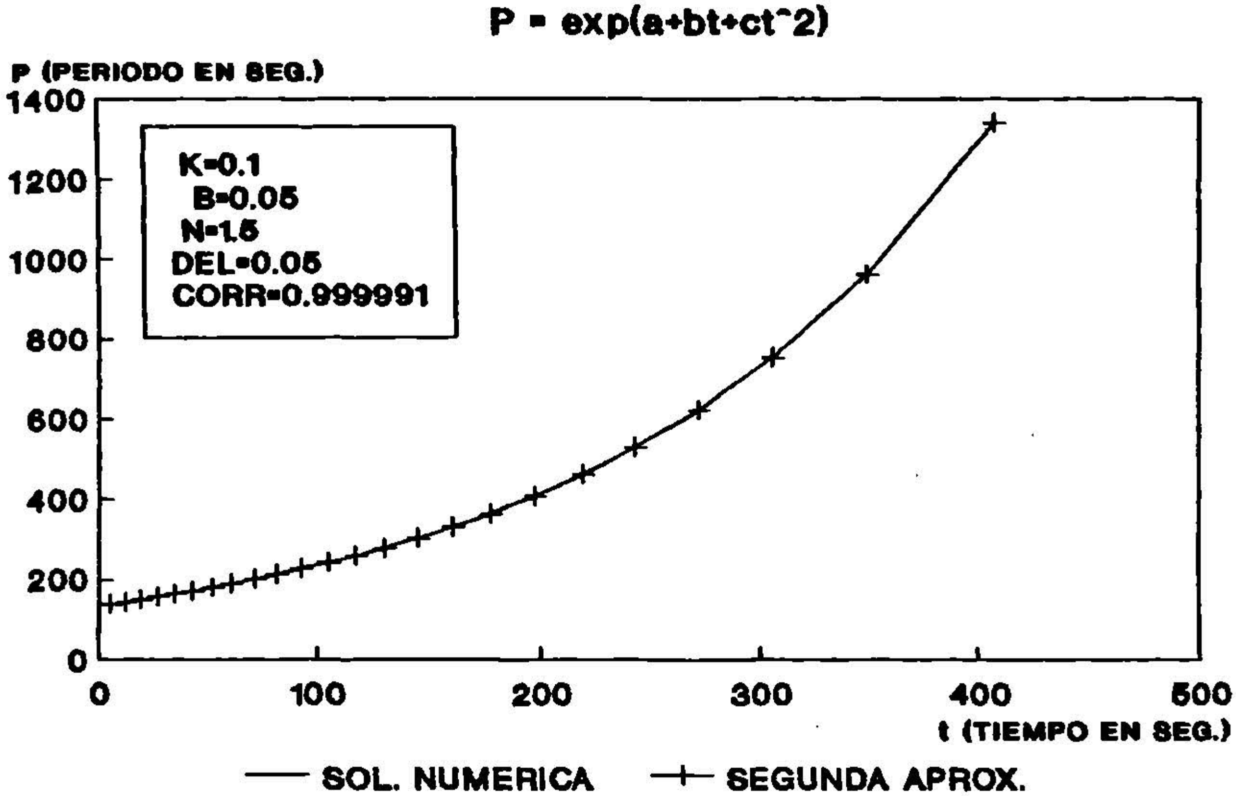
En las tres gráficas siguientes se presenta la correlación entre la solución numérica y la obtenida con la mejor aproximación para N variando entre 0 y 1.

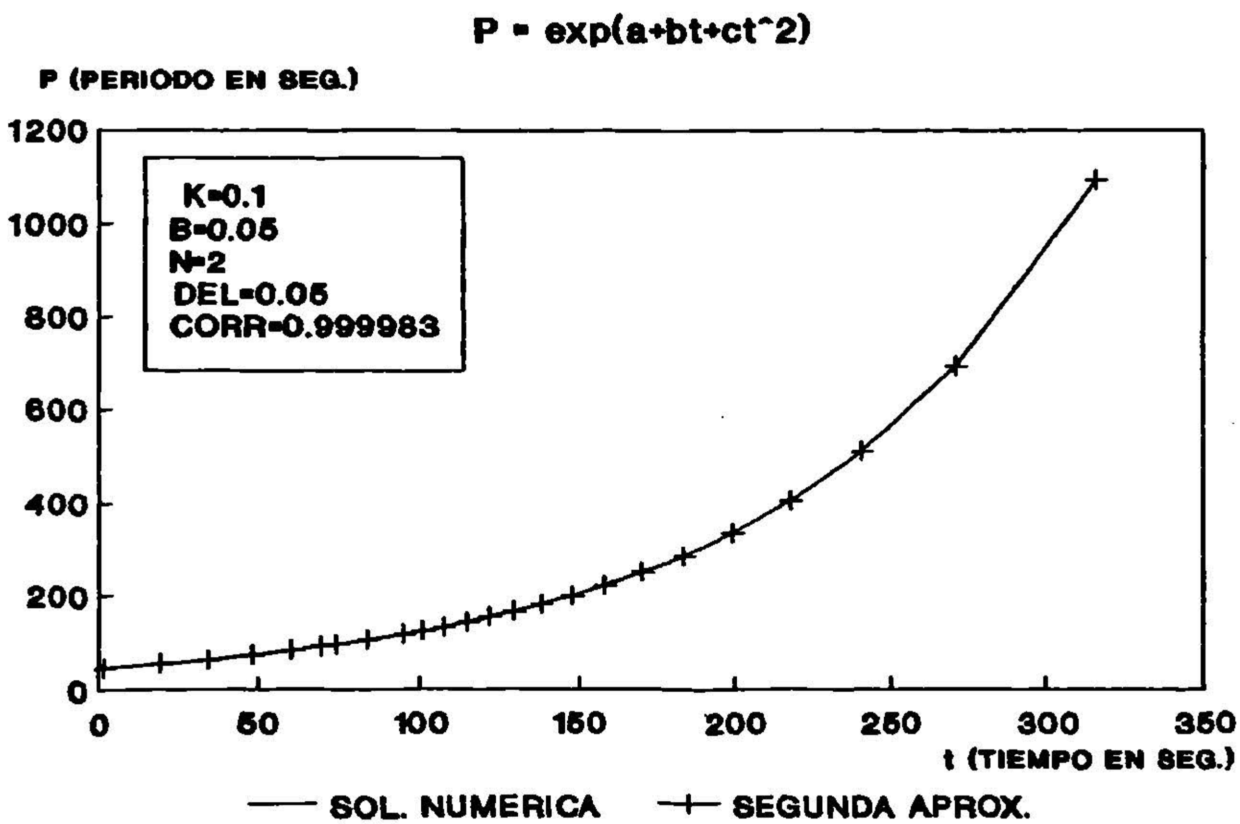


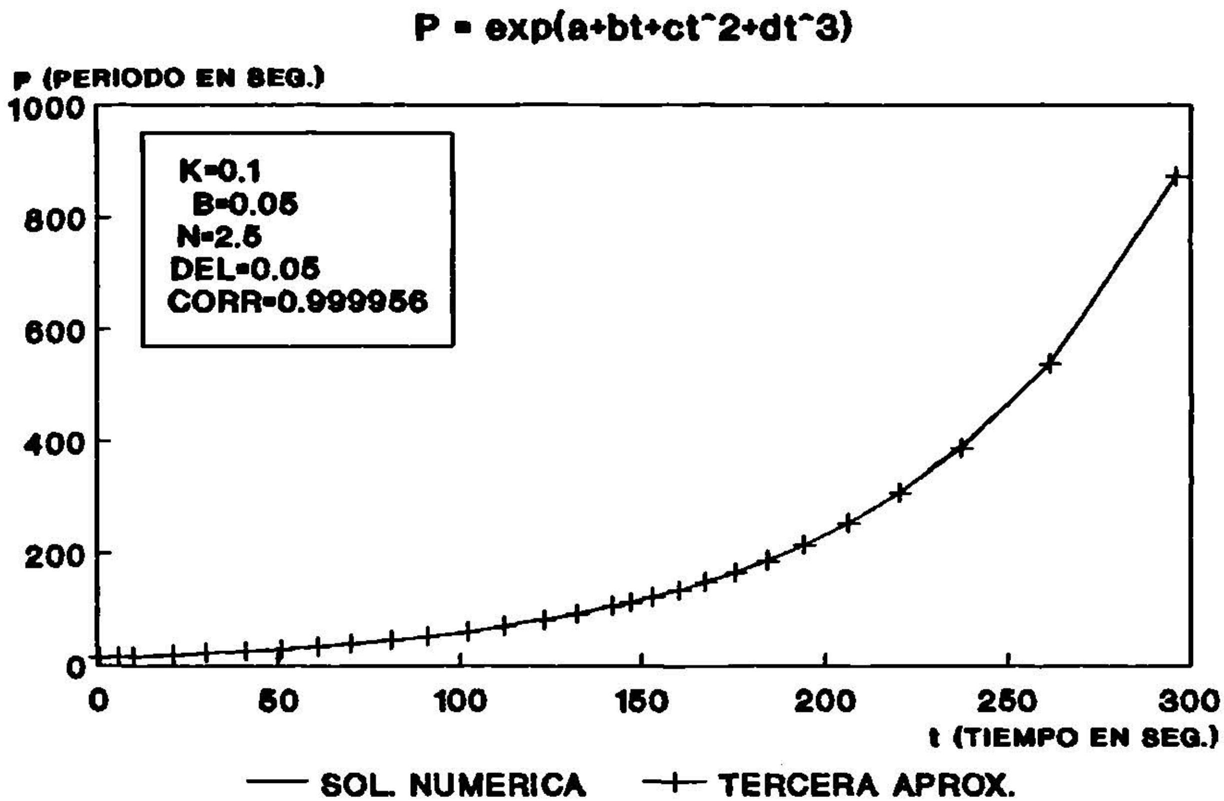



P = exp(a+bt+ct^2+dt^3)
p (PERIODO EN SEG.)
800
700
600
500
400
300
200
100
0
K=0.1
B=0.05
N=0.7
DEL=0.05
CORR=0.999968
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
t (TIEMPO EN SEG.)
(Miles)
SOL. NUMERICA
TERCERA APROX.

En las tres gráficas siguientes se presenta la correlación entre la solución numérica y la obtenida con la mejor aproximación para N mayor que 1.







P = exp(a+bt+ct^2+dt^3)
P (PERIODO EN SEG.)
K=0.1
B=0.05
N=2.5
DEL=0.05
CORR=0.999956
0
200
400
600
800
1000
0
50
100
150
200
250
300
t (TIEMPO EN SEG.)
SOL. NUMERICA
TERCERA APROX.

CAPITULO IV

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

La descripción de situaciones físicas a través de modelos lineales representa una primera aproximación, la cual corresponde a los llamados casos ideales, como lo son el caso del sistema masa-resorte donde la constante del resorte y la masa del objeto se consideran constantes, otra simplificación se encuentra en el caso de aproximar las fuerzas de arrastre a simples fuerzas de fricción o en el mejor de los casos a fuerzas proporcionales a la primera potencia de la velocidad.

El principal argumento para no incluir en el proceso de enseñanza-aprendizaje situaciones más realistas, es que las ecuaciones diferenciales que resultan son de carácter no-lineal y éstas a su vez no se cubren en las bases matemáticas del nivel educativo superior.

Un ejemplo de éstas dificultades se presenta en la ecuación diferencial de un sistema masa-resorte sujeto a una fuerza restitutiva del tipo $F = -kx^N$ con $N \geq 0$ y k constante, y a una fuerza de arrastre del tipo $F = -\beta v^S$ con $S \geq 0$, sistema para el cual la correspondiente ecuación diferencial es:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^S + k[x(t)]^N = 0$$

En el presente trabajo se muestra claramente la aplicabilidad del método de J. Ogborn en la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales no-lineales. La principal razón de haber elegido este método radica en su sencillez algorítmica y en la facilidad de emplear un lenguaje de alto nivel, en este caso el BASIC.

Precisamente, hoy en día a los estudiantes del nivel medio superior (Preparatoria o Bachillerato) se les proporciona dentro de su formación curricular cursos básicos de ciencias naturales y del lenguaje BASIC, razón por la cual queda plenamente justificado el incluir modelos más realistas en la enseñanza de las ciencias.

Se debe mencionar en este punto, que el único requerimiento necesario extra, es el de incluir dentro de los cursos de computación el tema relacionado con el manejo del paquete LOTUS 123, lo cual no representa ninguna dificultad a este nivel.

Como se demostró en el presente trabajo, la exactitud que se alcanza con el método de Ogborn, permite una amplia gama de aplicaciones en situaciones donde modelos lineales y no-lineales (por ejemplo el caso del péndulo) normalmente se tratan con ecuaciones diferenciales.

Otros aspectos de gran importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se impulsarían mediante el empleo de esta técnica, son los siguientes:

1) La interacción maestro-alumno, debido a la enorme variedad de situaciones que ameritan discusiones y asesorías.

2) La actualización y modernización de las técnicas y métodos del proceso de enseñanza-aprendizaje.

3) La investigación tanto teórica como experimental de maestros y alumnos, en los niveles medio superior y superior.

Finalmente, un objetivo que siempre estuvo presente en el desarrollo de esta tesis fué el de considerarla como una base para futuras investigaciones, lo cual queda firmemente establecido por los siguientes argumentos:

1) El algoritmo de Ogborn se puede modificar con el fin de minimizar las diferencias entre métodos analiticos y numéricos.

2) La posibilidad de generar métodos que incluyan situaciones en dos y tres dimensiones.

3) La posibilidad de emplear ajustes polinomiales.

Aunque se podrian enumerar más argumentos, consideramos que estos son los más relevantes.

REFERENCIAS.

[Ref. 1] Dennis G. Zill, Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones, Iberoamérica, 1982, Capítulo IV.

[Ref. 2] Joseph Norwood Jr., Intermediate Classical Mechanics, Prentice-Hall, 1979, Capítulo III.

[Ref. 3] Francis B. Hildebrand, Advanced Calculus for Aplications, Prentice-Hall, 1976, Capítulo III.

[Ref. 4] J.Ogborn, Procceedings of the International Workshop on the Use of Microcomputers in Science Education. Edited by George Marx and Paul Szucs. International Centre for Educational Technology. Veszprem, Hungary, 1985.

[Ref. 5] Bernabé L. Rodríguez B. y Sergio Vallejo González, Modificación de los métodos iterativos de Ogborn y Feynman, su aplicacón en las ecuaciones diferenciales no-lineales y el proceso de enseñanza-aprendizaje, U.A.N.L., 1991.

[Ref. 6] Bernabé L. Rodríguez B. y Gloria Azucena Tamez V., Utilización del método iterativo de J. Ogborn en la solución de ecuaciones diferenciales simples no-lineles y su aplicación en la enseñanza, U.A.N.L., 1991.