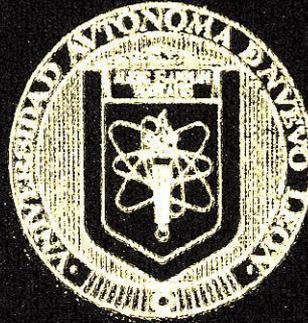


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS



**ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA
Y SUS APLICACIONES
(ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES)**

**TEMA DE SUSTENTACION PARA OBTENER EL TITULO
LICENCIADO EN FISICA**

PRESENTA

JOSE RODOLFO CHAPA MORONES

ASESOR

LIC. JESUS RIVERO JIMENEZ

MONTERREY, NUEVO LEON

AGOSTO DE 1993

TL

QC20

.C53

1993

c.1



1080171550

FECHA DE EXPIRE: 30 AGOSTO 93 4:00 P.M.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS



ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA
Y SUS APLICACIONES
(ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES)

TEMA DE SUSTENTACION PARA OBTENER EL TITULO
LICENCIADO EN FISICA

PRESENTA

JOSE RODOLFO CHAPA MORONES

ASESOR

LIC. JESUS RIVERO JIMENEZ

MONTERREY, NUEVO LEON

AGOSTO DE 1993



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO - MATEMATICAS

ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA
Y SUS APLICACIONES
(ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES)

TEMA DE SUSTENTACION PARA OBTENER EL TITULO
LICENCIADO EN FISICA

PRESENTA

JOSE RODOLFO CHAPA MORONES
LIC. JESUS RIVERO JIMENEZ - ASESOR

MONTERREY, NUEVO LEON

AGOSTO DE 1993

A MIS PADRES:

**JUAN PABLO CHAPA GARZA Y ALICIA MORONES DE CHAPA
POR SU APOYO EN TODOS ESTOS AÑOS DE ESTUDIO**

A MIS HERMANOS:

JUAN PABLO Y DIANA ALICIA CHAPA MORONES

A MI TIO:

**JOSE RUBEN MORONES IBARRA
POR SUS CONSEJOS Y AYUDA QUE PUDE APRENDER LO QUE SE.**

A MI NOVIA:

**YOLANDA GONZALES IBARRA
QUIEN CON SU COMPRESION ME AYUDO A SALIR ADELANTE.**

**ECUACIONES DE LA FISICA - MATEMATICA
Y SUS APLICACIONES
(ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES)**

PROLOGO

El tema de las ecuaciones en derivadas parciales es muy amplio y se relaciona con muchas ramas distintas de la matemática, por esta razón nos hemos concentrado, casi por entero, en las ecuaciones lineales de segundo orden del tipo que aparecen en los problemas físicos y de ingeniería mas simples. Estas son las llamadas ecuaciones de la física matemática entre las cuales estan, la ecuación de ondas, la ecuación de conducción del calor. La ecuación de Laplace y la ecuación de Schrödinger.

Se dá mayor énfasis en los métodos de solución de separación de variables y transformadas integrales, no se intenta en absoluto entrar en los distintos métodos numéricos de resolución, a pesar de su importancia.

INDICE

I.- INTRODUCCION	1
II.- PRESENTACION Y PROPIEDADES	6
III.- ECUACIONES HIPERBOLICAS	39
IV.- ECUACIONES ELIPTICAS	64
V.- ECUACIONES PARABOLICAS	96
VI.- APLICACIONES	114
VII.- CONCLUSIONES	150
VIII.- APENDICES	151

BIBLIOGRAFIA

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

I.- INTRODUCCIÓN

En el estudio de los fenómenos naturales las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales aparecen con tanta frecuencia como las ordinarias.

Por regla general esto ocurre en casos en que un suceso viene descrito por una función de varias variables.

Del estudio de la naturaleza surgió el tipo de ecuaciones en derivados parciales, que en momento presente está siendo investigado más a fondo y que probablemente es el más importante en la estructura general del saber humano: las ecuaciones de la física-matemática.

Consideramos en primer lugar oscilaciones en un medio cualquiera.

En virtud de tales oscilaciones todo punto del medio, que en equilibrio ocupa la posición (x, y, z) , se habrá desplazado al cabo de un tiempo t según el vector (x, y, z, t) , que depende de la posición inicial del punto (x, y, z) y del tiempo t . En este caso el proceso en

cuestión estará escrito por un campo vectorial. Pero es fácil ver que el conocimiento de este campo vectorial, esto es, el campo de desplazamiento de los puntos del medio, no es suficiente para una descripción completa de la oscilación. También es necesario conocer, por ejemplo, la densidad $b(x, y, z, t)$ en cada punto del medio, la temperatura $T(x, y, z, t)$ y la tensión interna, por ejemplo, la fuerza ejercida que sobre un volumen arbitrariamente elegido del cuerpo ejerce el resto del mismo.

Los sucesos y procesos físicos que ocurren en el espacio y el tiempo siempre consisten en variaciones, a lo largo del tiempo, de ciertas magnitudes físicas relativas a los puntos del espacio. Estas cantidades pueden ser descritas por funciones de cuatro variables independientes, x, y, z , y t donde x, y y z son las coordenadas de un punto del espacio, y t es el tiempo.

Las magnitudes físicas pueden ser de diferentes clases. Algunas están completamente caracterizadas por sus valores numéricos, como la temperatura, la densidad y algunas otras y se denominan escalares. Otras tienen dirección y son por lo tanto magnitudes vectoriales como: velocidad, aceleración, intensidad de un campo eléctrico etc.

Las magnitudes vectoriales se pueden expresar por la

longitud del vector y su dirección. En física-matemática una magnitud escalar o un campo escalar se representa por una función de 4 variables independientes, mientras que una magnitud vectorial definida sobre todo el espacio o, como suele decirse, un campo vectorial está descrito por 3 funciones de estas variables. Podemos escribir tal magnitud en la forma: $\bar{U}(x, y, z, t)$ ó en forma de 3 funciones $U_x(x, y, z, t)$, $U_y(x, y, z, t)$, $U_z(x, y, z, t)$, donde U_x, U_y, U_z son las proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas.

Además de las magnitudes vectoriales y escalares, aparecen en física antes aún mas complicados, como es, por ejemplo, la expresión del estado de tensión de un cuerpo en un punto dado.

Tales magnitudes se llaman tensores; una vez fijada la elección de los ejes de coordenadas, se pueden caracterizar por un conjunto de funciones de las cuatro variables independientes.

De esta forma, la descripción de clases muy distintas de fenómenos físicos viene normalmente dada por medio de varias funciones de varias variables. Por supuesto, tal descripción no puede ser absolutamente exacta.

Por ejemplo, cuando describimos la densidad de un medio a

traves de una función de cuatro variables independientes, ignoramos el hecho de que en un punto concreto no podemos tener densidad alguna. Los cuerpos estudiados tienen una estructura molecular y las moléculas no están contiguas sino que existen distancias finitas entre una y otra .

Las distancias entre las moléculas son en general considerablemente más grandes que las dimensiones de las mismas. Así, pues, la densidad es la razón de la masa contenida en un pequeño volumen. La densidad en un punto podemos definirla como el límite de tales razones para volúmenes decrecientes. Una simplificación e idealización aún mayores se introducen en el concepto de temperatura de un medio. La mayoría de las magnitudes estudiadas en la física tienen exactamente en el mismo carácter.

La física-matemática trabaja con magnitudes ideales, considerando solamente los valores medios de estas magnitudes.

Tal idealización puede parecer algo burda, pero es muy útil, ya que permite hacer un análisis de muchas materias complicadas, en las cuales se considera solamente los elementos esenciales y se omiten las características secundarias.

El objeto de la física-matemática es el estudio de las relaciones que existen entre estos elementos idealizados; estas relaciones se describen por medio de conjuntos de funciones de varias variables independientes.

II.- PRESENTACIÓN Y PROPIEDADES.

Un ejemplo de una ecuación lineal es de primer orden:
(lineal en z)

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Ecuación Cuasi-Lineal

$$Z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{(\partial z)^2}{(\partial y)^2} = 0$$

La solución de la ecuación es de la forma $z = \varphi(x, y)$, lo cual reduce la ecuación a la identidad, la relación $F(x, y, z) = 0$ de la cual z es una función implícita de X y Y .

En el caso de las ecuaciones diferenciales parciales; la solución general implica funciones arbitrarias que funciones específicas; veamos el siguiente ejemplo:

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \dots (1) \text{ lo satisface la expresión}$$

$$z = f(x + 2y) \dots (2)$$

De (1) Obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df(x+2y)}{d(x+2y)} \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} = f'(x+2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df(x+2y)}{d(x+2y)} \frac{\partial(x+2y)}{\partial y} = 2f'(x+2y) = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$$

De (2) Llegamos a (1)

De (2) vemos que es la solución más general de (1); si nosotros introducimos nuevas variables como

$$t = x + 2y \quad s = x$$

Se sigue que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial t}$$

=> (1) que da simplemente

$$2 \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

Cuando z es considerada función de s y t .

La solución general de esta ecuación es $z = f(t) = f(x+2y)$ donde f es una función arbitraria de acuerdo a (2). Nosotros vemos que expresiones como $z = x+2y+1$, $z = \text{Sen}(x+2y)$, $z = 4 \sqrt{x+2y} + \text{Cos}(x+2y)$; son soluciones particulares de la ecuación diferencial parcial (1); se puede efectuar el caso para ecuaciones diferenciales parciales de mayor orden.

Ecuación Cuasi-Lineal de primer orden:

La más general ecuación diferencial parcial cuasi-lineal de primer orden se escribe de la siguiente manera:

$$F(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + G(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \dots \dots \dots (3)$$

Donde Z es la variable dependiente y X e Y son variables independientes como F y G es independiente de Z y R es una función lineal de Z ó sea:

$$R = R_1 Z + R_2 \text{ entonces:}$$

$$F(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + G(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y)z + R_2(x, y) \dots (4)$$

Este es un caso especial

Suponemos que la ecuación $U(x, y, z) = C \dots (5)$ define la solución de (3) de (5) determinamos Z como función de X e Y el cual satisface (3); entonces por diferenciación parcial nosotros obtenemos 2 resultados

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Donde las derivadas $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ y $\frac{\partial U}{\partial z}$ de variables X e

Y y Z es considerada independiente. Hasta aquí nosotros podemos escribir:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial u / \partial y}{\partial u / \partial z}$$

Donde por supuesto que $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$; introducida es (3) la ecuación que gobierna la función u es obtenida de la forma:

$$F \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \dots\dots (5)$$

De esta forma se tiene la ventaja de que las variables x, y , y z desempeñan papeles simétricos, y podemos darle una interpretación geométrica a la ecuación.

Notamos que (5) puede escribirse de la forma de producto punto como:

$$(\hat{F}\hat{i} + \hat{G}\hat{j} + \hat{R}\hat{k}) \cdot \bar{\nabla}u = 0 \dots\dots(6)$$

Dado que $\bar{\nabla}u$ es el vector normal a la superficie $u=0$; en la ecuación 6 el vector $\hat{F}\hat{i} + \hat{G}\hat{j} + \hat{R}\hat{k}$ es perpendicular a lo normal de la superficie en ese punto de la superficie. Notamos que cualquier punto del vector $\hat{F}\hat{i} + \hat{G}\hat{j} + \hat{R}\hat{k}$ es tangente a la curva de la integral de superficie $u = 0$ la cual pasa a través del punto.

Si \vec{r} es el vector de posición de un punto de una curva característica y s representa la longitud de arco de la curva, entonces el vector unitario tangente de la curva en un punto está dado por:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \hat{i} + \frac{dy}{ds} \hat{j} + \frac{dz}{ds} \hat{k}$$

El requisito de este vector es que tiene la misma dirección que el vector $F\hat{i} + G\hat{j} + R\hat{k}$; sujeta a las condiciones:

$$F = u \frac{dx}{ds}; \quad G = u \frac{dy}{ds}; \quad R = u \frac{dz}{ds} \dots (7)$$

Donde u es una función de X , Y y Z .

Estas ecuaciones pueden escribirse de la forma diferencial

$$\frac{dx}{F} = \frac{dy}{G} = \frac{dz}{R} \dots (8)$$

Y por lo tanto es equivalente a 2 ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones de las ecuaciones independientes implica que (8) se denote por:

$$U_1(x, y, z) = C_1; \quad U_2(x, y, z) = C_2$$

Donde C_1 y C_2 son constantes independientes. Estas ecuaciones representan 2 familias de superficies; tal que la superficie de la primera familia superficie interseca a la superficie de la segunda familia.

Lo más conveniente es escribir la solución de la forma:

$$U_2(x, y, z) = F[U_1(x, y, z)]$$

La solución general de la ecuación:

$$F \frac{\partial z}{\partial x} + G \frac{\partial z}{\partial y} = R$$

Es la forma $F(U_1, U_2) = 0$ ó $U_2 = F(U_1)$

Donde $U_1(x, y, z) = C_1$ y $U_2(x, y, z) = C_2$ son soluciones de cualquiera de las 2 independientes ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual implica las relaciones:

$$\frac{dx}{F} = \frac{dy}{G} = \frac{dz}{R}$$

La intersección de las 2 superficies $U_1 = C_1$ y $U_2 = C_2$, cuya curva característica es tangente a cualquier punto en la dirección radial (F, G, R) .

Si por ejemplo $R=0$, $\rightarrow \frac{dx}{F} = \frac{dy}{G} = \frac{dz}{0}$; implica que las 2

ecuaciones $Gdx = Fdy$ y $dz = 0$

Ejemplo:

$$\text{Tomemos la ecuación } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad (A)$$

La ecuación asociado es la siguiente:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Y las 2 soluciones son de la forma:

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2$$

entonces podemos escribir la solución general de la forma

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0 \quad \text{o} \quad z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ó en otras formas equivalentes como:

$$z = y g\left(\frac{y}{x}\right); \quad z = x f\left(\frac{x}{y}\right); \quad z = y g\left(\frac{x}{y}\right)$$

- Condiciones Iniciales -

En el caso lineal; la ecuación

$$F(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + G(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = R_1(x, y)z + R_2(x, y) \dots \quad (B)$$

ya que F, G son independientes de z , la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{G}{F}$

implica solo a, X e Y .

Si tenemos una solución de la forma $U_1(x, y) = C_1$, acaso resulta que la expresión puede ponerse "y" en términos de x y

C_1

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R_1 z + R_2}{P}$$

Es una ecuación diferencial ordinaria en z ; la solución a esta ecuación se describe de la siguiente manera

$$U_2 \equiv z\alpha_1(x, C_1) + \alpha_2(x, C_1) = C_2$$

Si C_1 es reemplazada equivalentemente en términos de x y y , resulta la forma general

$$U_2 \equiv z\beta_1(x, y) + \beta_2(x, y) = C_2$$

La solución general de la ecuación diferencial parcial es $U_2 = f(U_1)$ ó

$$z = \frac{1}{\beta_1(x, y)} f[U_1(x, y)] - \frac{\beta_2(x, y)}{\beta_1(x, y)}$$

entonces, la solución general de la ecuación lineal de primer orden la podemos escribir de la forma

$$z = S_1(x, y) f[S_2(x, y)] + S_3(x, y)$$

donde S_1 , S_2 , S_3 son funciones específicas y f es una función arbitraria.

Ejemplo: En este caso la ecuación

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = z - 1$$

entonces la ecuación asociada es:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z-1}$$

la igualdad de los primeros 2 miembros esta dado por:

$$ydy - xdx = 0 \quad , \quad y^2 - x^2 = C_1$$

la igualdad del primer y tercer miembro dá

$$\frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + C_1}}; \quad \frac{z-1}{x + \sqrt{x^2 + C_1}} = C_2 \quad \text{ó} \quad \frac{z-1}{x+y} = C_2$$

entonces, con $U_1 = y^2 - x^2$ y $U_2 = (z-1)/(x+y)$,
la solución general de la ecuación es de la forma $U_2 = f(U_1)$

$$z = (x+y) f(y^2 - x^2) + 1$$

Ecuaciones lineales y Cuasilineales de Segundo Orden, con coeficientes constantes; consideremos la ecuación de la forma especial.

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

donde a,b,c son constantes.

Obtenemos la solución general; asumiendo la solución de la forma

$$z = f(y + mx) \dots\dots(1)$$

donde f es una función arbitraria 2 veces diferenciable y m es una constante entonces de (1) obtenemos las expresiones

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = m^2 f''(y + mx); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = m f''(y + mx)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(y + mx) \quad ;$$

introduciendo estos resultados en la ecuación original tenemos que:

$a m^2 + b m + c = 0$; donde obtenemos los valores de $m: m_1$ y m_2 , entonces debido a la linealidad de la ecuación; tenemos que (1) es de la forma:

$z = f_1(y + m_1 x) + g_1(y + m_2 x)$; lo cual es la solución más general de la ecuación.

Esto se puede aplicar de forma análoga; para obtener la solución general de la ecuación lineal de orden N ; y si m se repite r veces entonces la solución es de la forma:

$$f_1(y + m_1 x) + x f_2(y + m_1 x) + \dots + x^{r-1} f_r(y + m_1 x)$$

En este momento podemos introducir la solución de D'Alembert para una ecuación de onda; ya que tiene mucho en común con lo que hemos estado tratando.

- Solución de D'Alembert para la ecuación de onda-

De la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, con $a^2 = \frac{T}{\rho}$

se puede encontrar más rápidamente la solución buscada, si se transforma la ecuación en una forma apropiada; introduciendo nuevas variables independientes.

$$v = x + at \quad , \quad z = x - at$$

entonces u se transforma en una función de v y z , y las derivadas contenidas en la ecuación de onda pueden expresarse en términos de las derivadas respecto a v y z , aplicando la regla de la cadena tenemos que:

$$v_x = 1 \quad , \quad z_x = 1 \quad \text{entonces:}$$

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v(1) + u_z(1) = u_v + u_z$$

aplicando nuevamente la regla de la cadena obtenemos

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x$$

y como $v_x = 1$ y $z_x = 1$; la expresión se transforma en

$$\underline{u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}} \quad \checkmark$$

Ahora hacemos lo mismo para obtener u_{tt} entonces:

$$v = x + at \quad , \quad z = x - at$$

$$v_t = a \quad , \quad z_t = -a$$

$$\begin{aligned} \rightarrow U_t &= U_v V_t + U_x Z_t = U_v(a) + U_x(-a) = a[U_v - U_x] \\ U_{tt} &= a[U_v - U_x]_t = a[U_v - U_x]_v V_t + a[U_v - U_x]_x Z_t \\ &= a[U_v - U_x]_v(a) + a[U_v - U_x]_x(-a) \\ \underline{U_{tt}} &= \underline{a^2(U_{vv} - 2U_{vx} + U_{xx})} \end{aligned}$$

Sustituyendo U_{tt} y U_{xx} en la ecuación de onda se obtiene

$$U_{vx} = \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x} = 0$$

Entonces podemos integrar con respecto a x , encontrando

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v) \quad ; \quad \text{con } h(v) \text{ función arbitraria de } v$$

Integrando respecto a v se tiene

$$u = \int h(v) dv + \psi(x) \quad \text{con } \psi(x) \text{ función arbitraria de } x.$$

Puesto que la integral es una función de v ; supongamos que $\phi(v)$; la solución de U es de la forma:

$$U = \phi(v) + \psi(x)$$

y como $v = x + at$ y $x = x - at$

entonces sustituyendo tenemos:

$$U(x, t) = \phi(x+at) + \psi(x-at) \dots \dots \dots (1)$$

Esto es lo que se conoce como solución de D'Alembert para la ecuación de onda. Las funciones ϕ y ψ pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. Se ilustra este hecho en el caso de la velocidad inicial cero y una desviación inicial dada $U(x, 0) = \phi(x)$.

Derivando (1) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U_t = a\varphi'(x+at) - a\psi'(x-at) \dots\dots\dots (2)$$

De (1) y (2) y las condiciones iniciales; se tiene

$$U(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$U_t(x, 0) = a\varphi'(x) - a\psi'(x) = 0$$

De la segunda ecuación se obtiene que $\varphi' = \psi'$; entonces $\psi = \varphi + k$ y considerando esto y la primera ecuación tenemos que:

$$\varphi + \varphi + k = f \quad \text{ó} \quad 2\varphi + k = f \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{f - k}{2}$$

con estas funciones (1) se transforma en:

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] \quad \checkmark$$

Este resultado está de acuerdo con lo obtenido anteriormente; debido a las condiciones frontera la función f debe ser impar y período $2l$.

Clasificación de ecuaciones

Algunas ecuaciones de las más importantes en la física, en las que únicamente intervienen 2 variables independientes, son casos especiales de la ecuación homogénea lineal general de segundo orden:

$$a U_{xx} + 2h U_{xy} + b U_{yy} + 2f U_x + 2g U_y + eU = 0$$

en donde a , h , b , f , g , y e tanto pueden ser constantes como funciones en x e y . Por ejemplo, la ecuación de ondas

$$U_{xx} = \frac{1}{c^2} U_{tt} \quad \dots\dots\dots(2)$$

se obtiene de (1) identificando la variable independiente y con la variable temporal t y eligiendo

$$a = 1, \quad h = 0, \quad b = \frac{1}{c^2}, \quad f = g = e = 0$$

vemos que la forma de (1) es parecida a la ecuación general de la cónica

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + e = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Esta ecuación representa una elipse, parábola o hipérbola, según los valores tomados por las constantes. Usamos una clasificación semejante para la ecuación en derivadas parciales (1) entonces:

$$\begin{array}{lll} \text{elíptico} & \text{si} & ab - h^2 > 0 \\ \text{parabólico} & \text{si} & ab - h^2 = 0 \\ \text{hiperbólico} & \text{si} & ab - h^2 < 0 \end{array}$$

entonces la ecuación (2) es de tipo hiperrbólico puesto que

$$ab - h^2 = \frac{-1}{c^2} < 0$$

Si tomamos la ecuación de Laplace de 2 variables

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

observamos que $a = 1$, $b = 1$, $h = 0$, $f = g = e = 0$; entonces como $ab - h^2 = 1 > 0$, corresponde al tipo elíptico. La ecuación

$$U_{xx} = K U_y$$

tenemos que $a = 1$, $h = 0$, $b = 0$, $f = 0$, $g = -\frac{K}{2}$, $e = 0$; entonces $ab - h^2 = 0$; corresponde al de tipo parabólico.

Condiciones de contorno

La presentación matemática de un fenómeno físico mediante una ecuación en derivadas parciales y un conjunto de condiciones contorno esta bien planteado si verifica 2 condiciones. Primeramente, la solución debe ser única, ya que nuestra experiencia de la naturaleza es que un conjunto dado de circunstancias llevan a un resultado único. Después, la solución obtenida deberá ser estable, o sea, que un pequeño cambio en las condiciones de contorno producirán un pequeño cambio en la solución correspondiente, esto es importante puesto que las condiciones de contorno nos llegan por experimentación, siempre existirán ciertos pequeños errores de observación de sus valores y tales errores no deben producir grandes cambios en la solución.

Consideramos por ejemplo: *La ecuación de Laplace*

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

con las condiciones contorno

$$U(x, 0) = \frac{\text{Sen } \pi x}{\pi} , \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

donde π es un parámetro.

La solución buscada es:

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \text{Sen } \pi x \text{ Cosh } \pi y \dots\dots\dots(6)$$

Sin embargo , cuando $n \rightarrow \infty$ la condición de contorno converge a

$$U(x,0) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

y éstas condiciones, junto con la ecuación (4) implican, por la serie de Taylor que $U(x,y) = 0$. Además, cuando $n \rightarrow \infty$, $U(x,y)$ en la ecuación (6) se hace infinitamente grande, entonces el problema definido por (4) y (5) no está bien planteado y por lo tanto, no podemos asociarlo con ningún fenómeno físico.

Existen 3 tipos principales de condiciones de contorno que aparecen con una frecuencia en la descripción de fenómenos físicos; los cuales son

a) Las condiciones de Dirichlet, en las que U se especifica en cada uno de los puntos de la frontera de una región (por ejemplo, la curva frontera de una región plana). El problema que consiste en resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en el interior de una región se llama problema de Dirichlet.

b) Las condiciones de Neumann, en las que se prefijan los valores de la derivada normal $\frac{du}{dn}$ de la función u sobre la frontera.

CAUCHY
c) Las condiciones de Cauchy, Aquí, si una de las variables independientes es t (tiempo) y se han dado los valores de u y de u_t en la frontera $t = 0$ (esto es, los valores iniciales de u y de u_t), entonces las condiciones de contorno son del tipo de Cauchy respecto de la variable t .

Analogías Físicas

Al investigar fenómenos en distintas ramas de la física, con frecuencia descubrimos caracteres comunes en éstos fenómenos. Entonces, al plantear matemáticamente el problema, obtenemos las mismas ecuaciones , que describen diferentes fenómenos físicos.

Un ejemplo sencillo puede ser el siguiente; la ecuación:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + bx = 0,$$

describe los diferentes procesos oscilatorios de los sistemas más sencillos; el péndulo matemático, las oscilaciones de un peso bajo la acción de la fuerza de elasticidad de un resorte, las oscilaciones eléctricas de un circuito simple con bobina y condensador, etc.

La generalidad de las ecuaciones para distintos procesos físicos permite, en base al estudio de las propiedades de un fenómeno, hacer conclusiones sobre las propiedades de otro fenómeno, menos estudiado.

Por ejemplo, el estudio de distintos fenómenos acústicos puede ser muy simplificado mediante el estudio de sistemas eléctricos semejantes.

La propagación de las oscilaciones eléctricas en los sistemas de constantes distribuidas se describe por las ecuaciones telegráficas.

$$\left. \begin{aligned} - I_x &= cV_t + GV \\ - V_x &= LI_t + RI \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

donde C, G, L, R son la capacidad, la pérdida, la inductancia y la resistencia distribuidas del sistema. Si se pueden despreciar la resistencia y la pérdida de corriente, se obtienen para V e I las ecuaciones ondulatorias

$$\begin{aligned} V_{xxx} - LCV_{tt} &= 0 \\ I_{xxx} - LI_{tt} &= 0 \end{aligned}$$

y las ecuaciones (1) toman la forma

$$\left. \begin{aligned} - I_x &= CV_t \\ - V_x &= LI_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

Al resolver el problema de la propagación del sonido en una dirección, por ejemplo, al estudiar el movimiento del aire en los tubos,

$$\left. \begin{aligned} - F_x &= \rho V_t \\ - V_x &= \frac{1}{\tau} Ft \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

donde V es la velocidad de las partículas que oscilan, ρ la densidad, p la presión, y $\tau = \rho_0 \gamma$, el coeficiente de elasticidad del aire.

La semejanza de las ecuaciones (2) y (3) permite establecer una correspondencia entre las magnitudes acústicas y las eléctricas.

A la diferencia de potencial le corresponde la presión, la corriente, la velocidad de desplazamiento de las partículas. La densidad, que determina las propiedades inerciales del gas, corresponde a la inductancia del circuito eléctrico, y la capacidad de este corresponde a $\frac{1}{\tau}$, es decir, a la magnitud inversa del coeficiente de elasticidad.

La misma correspondencia se puede establecer también partiendo de las expresiones de las energías cinética y potencial para los sistemas eléctrico y acústico.

El análogo mecánico de la ecuación telegráfica es la ecuación de las oscilaciones longitudinales de una barra, la cual, a semejanza con las ecuaciones (2), pueden escribirse de la forma:

$$-Vx = \frac{1}{k} Tt, \quad -Tx = \rho Vt$$

donde T es la tensión de la barra, V la velocidad de los puntos que vibran, ρ es la densidad y k , el coeficiente de elasticidad de la barra.

Comparando esta ecuación con la (2), podemos establecer una analogía entre las magnitudes eléctricas y mecánicas. Así, estableciendo una correspondencia entre la tensión eléctrica y la tensión de la cuerda, la corriente y la velocidad del movimiento de las partículas, se obtiene que la magnitud inversa del coeficiente de elasticidad corresponde a la capacidad, y la densidad, a la inductancia.

Problemas con valores en la frontera de Sturm - Liouville

Varios conjuntos ortogonales de funciones de importancia se encuentran como soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$[p(x)y'(x)]' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \dots (*)$$

Satisfaciendo las condiciones de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \dots (**)$$

Aquí λ es un parámetro real y α_1 , α_2 , β_1 , β_2 son constantes reales dadas de las cuales por lo menos una es diferente de cero en cada condición.

La ecuación (*) se conoce como ecuación de Sturm - Liouville; y la ecuación de Legendre, la ecuación de Bessel y otras importantes ecuaciones pueden escribirse en la forma (*). Las condiciones (**) se refieren a los puntos frontera del intervalo $[a, b]$, y por lo tanto, se les da el nombre de condiciones frontera. Una ecuación diferencial, junto con condiciones a la frontera, constituye lo que se conoce con el nombre problema de valor a la frontera; y el que nosotros consideramos se llama problema de Sturm - Liouville.

Por supuesto que este problema tiene la solución trivial $y = 0$ para cualquier valor del parámetro λ . Las soluciones $y \neq 0$ se llaman funciones características o eigenfunciones del problema y los valores de λ para los cuales existen esas soluciones se llaman valores característicos o eigenvalores del problema.

También introduciremos un operador diferencial lineal y homogéneo L definido por

$$L[y] = - [p(x)y']' + q(x)y$$

Antes de proceder a establecer algunas de las propiedades de (*) y (**), es necesario deducir una identidad, conocida como identidad de Lagrange, la cual es básica para el estudio de los problemas lineales con valores en la frontera. Sean u y v funciones que tienen segundas derivadas continuas sobre el intervalo $a \leq x \leq b$ entonces:

$$\int_a^b L[u]v dx = \int_a^b \{ -(pu')'v + quv \} dx$$

Integrando dos veces por partes el primer término del segundo miembro, tenemos:

$$\int_a^b L[u]v dx = -p(x)u'(x)v(x) \Big|_a^b + p(x)u(x)v'(x) \Big|_a^b + \int_a^b \{ -u(pv')' + uqv \} dx$$

$$= - p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_a^b + \int_a^b uL[v]dx$$

De aquí, al transportar la integral del segmento miembro, tenemos

$$\int_a^b \{L[u]v - uL[v]\}dx = - p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_a^b$$

La cual es la identidad de Lagrange.

Y si las funciones u y v satisfacen las condiciones en la frontera, la identidad de Lagrange se reduce a:

$$\int_a^b \{L[u]v - uL[v]\}dx = 0 \dots\dots\dots (***)$$

y utilizando la definición de producto interno $\langle u, v \rangle$ de 2 funciones de valores reales u, v y sobre un intervalo dado por ejemplo $a \leq x \leq b$, tenemos que

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$$

En esta notación (***) queda

$$\langle L[u], v \rangle - \langle u, L[v] \rangle = 0 \dots\dots\dots (**)$$

Es importante saber que (*) sigue siendo válida si u y v son funciones de valores complejos.

Teorema (1)

Todos los eigenvalores del problema de Sturm - Liouville

$$[p(x)y'(x)]' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \dots (1)$$

con las condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \dots (2)$$

Son reales. A menudo resulta conveniente introducir el operador diferencial lineal y homogéneo L , definido por

$$L[y] = - [p(x)y']' + q(x)y \dots (3)$$

entonces la ecuación diferencial puede escribirse como

$$L[y] = \lambda r(x)y \dots (4)$$

Demostración:

Supongamos que λ es un eigenvalor (posiblemente complejo) del problema (1), (2) y ϕ es una eigenfunción correspondiente; posiblemente también de valores complejos.

Escribamos: $\lambda = u + iv$ y $\phi(x) = U(x) + iV(x)$, donde $u, v, U(x), V(x)$ son reales. Entonces si hacemos $u = 0$ y también $\phi = a$

$$\rightarrow (L[\phi], \phi) = (\phi, L[\phi])$$

Sin embargo sabemos que $L[\phi] = \lambda r \phi$, entonces la ecuación queda $(\lambda r \phi, \phi) = (\phi, \lambda r \phi)$

desarrollados; y utilizando la definición del producto interno; obtenemos

$$\int_a^b \lambda r(x) \phi(x) \bar{\phi}(x) dx = \int_a^b \phi(x) \bar{\lambda} \bar{r}(x) \bar{\phi}(x) dx$$

como $r(x)$ es real entonces tenemos que

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x) \bar{\phi}(x) \phi(x) dx = 0$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x) [U^2(x) + V^2(x)] dx = 0$$

El integrando es no negativo y no idénticamente nulo.

Como el integrando también es continuo, se deduce que la integral es positiva.

Por lo tanto, el factor $\lambda - \bar{\lambda} = 2iv$ debe ser cero. De aquí que λ es real y el teorema queda demostrado.

Problema de Sturm - Liouville

Las funciones ortogonales aparecen en forma natural e inevitable en muchos tipos de problemas tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Su existencia en algunos problemas de los considerados está garantizada por el bello e importante teorema siguiente; que nos indica la probabilidad de las eigenfunciones con respecto a la función de peso γ .

(Teorema) (2) Consiste en una ecuación diferencial de la forma:

$$[p(x)y'(x)]' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

en $[a, b]$ junto con las condiciones a la frontera

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

siendo $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ continuas en $[a, b]$

Teorema: Si $Y_n(x)$ y $Y_m(x)$ son eigenfunciones del problema de Sturm - Liouville, correspondientes a los eigenvalores distintos λ_n y λ_m respectivamente, entonces

$$\int_a^b \gamma(x) Y_n(x) Y_m(x) dx = 0$$

Demostración:

Por hipótesis: $[F(x)Y\pi(x)]' - q(x)Y\pi(x) + \lambda\pi(x)Y\pi = 0 \dots(1)$

$$[F(x)Y'\pi(x)]' - q(x)Y\pi + \lambda\pi Y\pi = 0 \dots(2)$$

multiplicando (1) por $Y\pi(x)$ y (2) por $Y\pi(x)$ y restando miembro a miembro las 2 ecuaciones: (1) $Y\pi - (2)Y\pi$

$$Y\pi[FY'\pi]' - Y\pi[FY'\pi]' + (\lambda\pi - \lambda\pi) Y\pi Y\pi = 0$$

Integrando toda la ecuación respecto a x de $a \rightarrow b$

$$\int_a^b [Y\pi[FY'\pi]' - Y\pi[FY'\pi]' + (\lambda\pi - \lambda\pi) Y\pi Y\pi] dx \dots(3)$$

Integrando por partes la primera integral

$$\int_a^b Y\pi[FY'\pi]' dx \quad \text{tenemos } u(x) = Y\pi \quad dv = \frac{d}{dx} (FY'\pi) dx$$

$$du = Y'\pi dx \quad v = FY'\pi$$

$$\int_a^b Y\pi[FY'\pi]' dx = FY'\pi Y\pi \Big|_a^b - \int_a^b FY'\pi Y'\pi dx$$

entonces de (3)

$$FY\pi Y'\pi \Big|_a^b - FY'\pi Y\pi \Big|_a^b = (\lambda\pi - \lambda\pi) \int_a^b r(x)Y\pi(x)Y\pi(x) dx$$

Ahora bien Y_m y Y_n no son solo soluciones de la ecuación diferencial dada ya que para todos los valores de m y n satisfacen también a las condiciones de contorno

$$\alpha_1 Y(a) = -\alpha_2 Y'(a) \quad \text{y} \quad \beta_1 Y(b) = -\beta_2 Y'(b) = 0$$

$$\begin{aligned} & [F(b)Y_n'(b)Y_m(b) - F(a)Y_n'(a)Y_m(a)] - [F(b)Y_m'(b)Y_n(b) - F(a)Y_m'(a)Y_n(a)] \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) Y_n(x) Y_m(x) dx \end{aligned}$$

Sacando el factor común

$$\begin{aligned} & F(b)[Y_n'(b)Y_m(b) - Y_m'(b)Y_n(b)] - F(a)[Y_n'(a)Y_m(a) - Y_m'(a)Y_n(a)] \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r Y_n Y_m dx \end{aligned}$$

ahora introduciendo las condiciones de contorno tenemos:

$$F(b)[Y_m(b) \left(-\frac{\beta_1}{\beta_2} Y_n(b)\right) - Y_n(b) \left(-\frac{\beta_1}{\beta_2} Y_m(b)\right)]$$

$$F(a)[Y_m(a) \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} Y_n(a)\right) - Y_n(a) \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} Y_m(a)\right)] = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r Y_n Y_m dx$$

Se puede ver que el lado izquierdo es igual a cero →

Puesto que por hipótesis $\lambda_m \neq \lambda_n$ eran 2 valores cualesquiera →

$\lambda_m - \lambda_n \neq 0$ entonces tenemos que

$$\int_a^b r(x) Y_m(x) Y_n(x) dx = 0$$

Las funciones $Y_n(x)$ y $Y_m(x)$ son ortogonales a la función de peso $r(x)$ en $[a, b]$ con lo que el teorema queda demostrado.

Teorema (3). -

Los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville son todos simples, es decir, a cada uno eigenvalor le corresponde solo una eigenfunción linealmente independiente. Además, los eigenvalores forman una sucesión infinita y se pueden ordenar de acuerdo con la magnitud creciente, de modo que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Además, $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Consideramos ahora la cuestión de expresar una función dada f como serie de eigenfunciones del problema Sturm-Liouville. Supongamos que f satisface condiciones apropiadas, puede desarrollarse en una serie infinita de eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville; entonces tenemos que:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x) \dots \dots \dots (V)$$

donde $\varphi_n(x)$ satisfacen las ecuaciones de Sturm-Liouville y también la condición de ortonormalidad

$$\int_a^b r(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \int_a^b r(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

conocido como la delta de Kronecker. Donde las C_n se calculan:

$$C_m = \int_a^b r(x) f(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \langle f, r\varphi_m \rangle, \quad m = 1, 2, \dots \quad (V^*)$$

Teorema (4). -

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ las eigenfunciones normalizadas del problema de Sturm-Liouville.

Sean f y f' seccionalmente continuas sobre $a \leq x \leq b$. Entonces la serie (V) con coeficientes C_m dados por la ecuación (V*) converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$ en cada punto en el intervalo abierto $a < x < b$.

Problemas Autoadjuntos

Los problemas con valores en la frontera de Sturm-Liouville tienen una gran importancia por sí mismos, pero también pueden concebirse como perteneciendo a una clase mucho más extensa de problemas que tienen muchas de las mismas propiedades. Por ejemplo, existen muchas semejanzas entre los problemas de Sturm-Liouville y el sistema algebraico.

$$A x = \lambda x,$$

donde la matriz A de $n \times n$ es simétrico real o hermitiana. En cada caso, los eigenvalores son reales y las eigenfunciones o eigenvectores forman un conjunto ortogonal. Es más, las eigenfunciones o eigenvectores pueden usarse como la base para expresar una función o vector, respectivamente, esencialmente arbitrarios, como una suma. La diferencia más importante es que una matriz solo tiene un número finito de eigenvalores y eigenvectores, mientras que el problema de Sturm-Liouville tiene una infinidad. Resulta interesante y tiene una importancia fundamental en matemáticas, el que estos problemas aparentemente diferentes, que surgen de diferentes maneras en realidad forman parte de una sola teoría fundamental. Esta teoría por lo general se conoce como teoría de los operadores lineales y es parte de los que se llama análisis funcional.

III.- ECUACIONES HIPERBÓLICAS

(Fórmula de D'Alembert)

Haremos un estudio de un método para la determinación de las soluciones de los problemas de contorno para las ecuaciones de tipo hiperbólico para el problema con condiciones iniciales para la cuerda no acotada:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x)$$

$$U_t(x, 0) = \psi(x) \dots\dots\dots (2)$$

La ecuación de las características

$$dx^2 = a^2 dt^2$$

Se divide en 2

$$dx - a dt = 0$$

$$dx + a dt = 0$$

Integrando tenemos que

$$x - at = a_1 \quad ;$$

$$x + at = a_2$$

Introduciendo nuevas variables, tenemos

$$\xi = x + at \quad ;$$

$$\eta = x - at$$

Entonces la ecuación de las oscilaciones de la cuerda se reduce a la forma

$$U = 0_{\xi\eta} \dots\dots\dots (3)$$

Hallemos su integral; entonces cualquier solución de (3) sera de la forma

$$U(\xi, \eta) = f_{\eta}^*(\eta)$$

donde $f^*(\eta)$ es cierta función de la variable η . Después integramos esta igualdad con respecto a η para ξ fijas, entonces

$$U(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \dots (4)$$

donde f_1 y f_2 son funciones de ξ y η . De la misma forma, para cualesquiera funciones f_1 y f_2 , derivable 2 veces, la función $U(\xi, \eta)$ determinada por (4) es solución de la ecuación (3)

Como cualquier solución de la ecuación (3) puede ser representada en la forma (4) escogiendo adecuadamente f_1 y f_2 , la fórmula (4) es la integral general de dicha ecuación, entonces tenemos que:

$$U(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \dots \dots \dots (5)$$

que es la integral general de la ecuación (1). Suponemos que la solución del problema considerado existe, entonces, ésta se expresa mediante (5).

Determinemos las funciones f_1 y f_2 de modo que se cumplan las condiciones iniciales.

$$U(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \dots\dots\dots (6)$$

$$U(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \dots\dots\dots (7)$$

Integrando la segunda igualdad, tenemos

$$f_1(x) + f_2 = - \int \psi(\alpha) d\alpha + c$$

con x_0 y c , constantes. Y como

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + c \end{aligned}$$

se halla que:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{c}{2} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{c}{2} \dots\dots (8) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5) los valores hallados de f_1 y f_2 , se obtiene:

$$U(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right\}$$

o

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \dots\dots\dots (9)$$

Esta fórmula es la llamada fórmula de D'Alembert, bajo la hipótesis de la existencia de la solución del problema planteado. Esta fórmula demuestra la unicidad de la solución.

- Interpretación física -

La función $U(x, t)$, determinada por la fórmula (9), representa el proceso de la propagación de la desviación y velocidades iniciales.

Si fijamos $t = t_0$, la función $U(x_0, t)$ que da el proceso del movimiento del punto x_0 .

Supongamos que un observador, que se hallaba en el punto $x = 0$ en el momento $t = 0$, se mueve con velocidad a en el sentido positivo. Introducimos un sistema de coordenadas relacionado con el observador, haciendo $x' = x - at$, $t' = t$. En este sistema móvil de coordenadas, la función $U(x, t) = f(x - at)$ se determinará mediante la fórmula $U = f(x')$, y el observador vera todo el tiempo el mismo perfil que en el momento inicial.

Por lo tanto, la función $U(x, t) = f(x - at)$ en el perfil invariable $f(x)$, que se desplaza hacia la derecha, con velocidad a (onda que se propaga).

La función $f(x + at)$ representa, a una onda que se desplaza hacia la izquierda con velocidad a . De esta manera,

la solución general de (p) para la cuerda infinita es la superposición de 2 ondas, $f_1(x + at) + f_2(x - at)$, una de las cuales se desplaza hacia la derecha con velocidad a , y la otra, hacia la izquierda con la misma velocidad. Además

$$f_1(x + at) = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \psi(x + at);$$

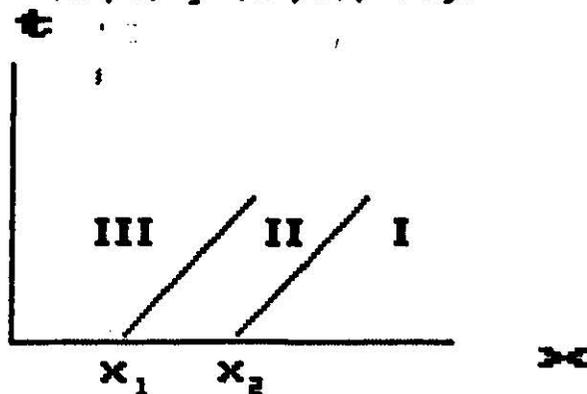
$$f_2(x - at) = \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \psi(x - at);$$

donde
$$\psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \varphi(a) da$$

Las rectas $x - at = cte$ y $x + at = cte$, son las características de (1).

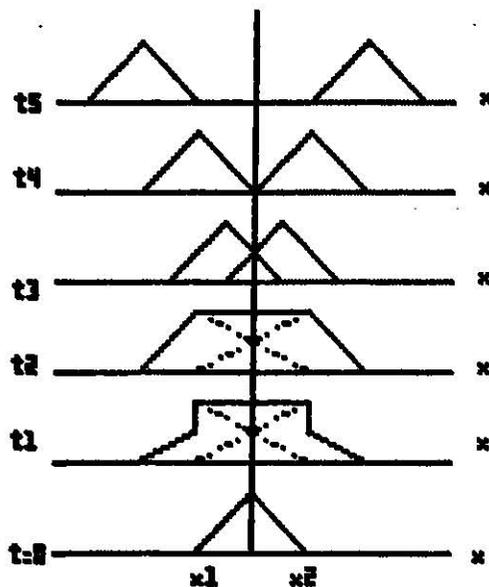
La función $U = f(x - at)$ se mantiene constante a lo largo de la característica $x - at = cte$; la función $U = f(x + at)$ es constante a lo largo de la característica $x + at = cte$.

Suponemos que $f(x)$ es diferente de cero solo en el intervalo (x_1, x_2) , y es nula fuera de este intervalo. Trazamos las características $x - at = x_1$, $x - at = x_2$ por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, Fig.



Estas dividen al semiplano $(x, t > 0)$ en tres regiones, I, II, III. La función $U = f(x - at)$ es distinta de cero sólo en la región II, donde $x_1 < x - at < x_2$, las características $x - at = x_1$, $x - at = x_2$ representan los frentes delantero y trasero de la onda que se propaga hacia la derecha.

Ejemplo: Estudiemos la propagación de una desviación inicial dada en forma de triángulo equilátero. Este perfil inicial se puede obtener si se tira de la cuerda en el medio del segmento $[x_1, x_2]$.

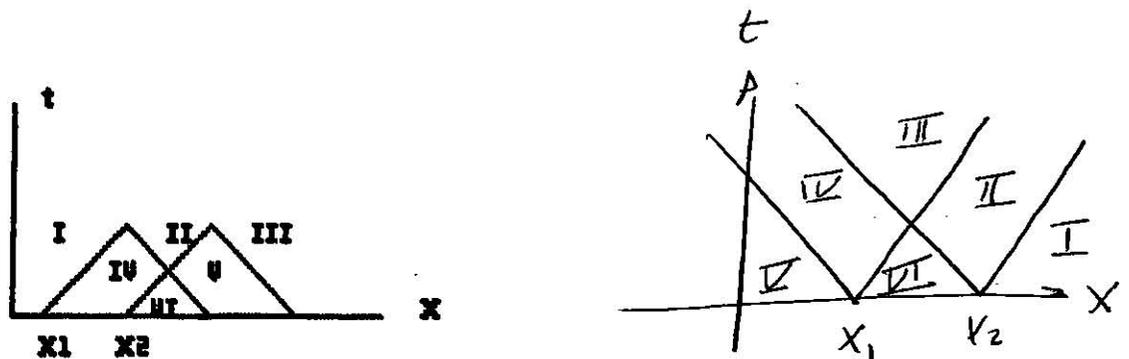


$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$$

En la figura se representan las posiciones sucesivas de la cuerda a intervalos de tiempo

$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$$

Se puede obtener una representación gráfica sobre el carácter del proceso de propagación mediante el plano de fases (x, t) . Trazamos las características por los puntos $F(x_1, 0)$, $G(x_2, 0)$; estas dividirán el semiplano $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ en seis regiones; figura siguiente:



La desviación $U_1(x, t)$ en cualquier punto (x, t) se dá por:

$$U_1(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$$

Por esto las regiones I, III, V, la desviación es igual a cero, ya que el triángulo característico de cualquier punto de estas regiones no tiene puntos comunes con el segmento $[x_1, x_2]$, en el cual están dadas las condiciones iniciales. En la región II la solución es la onda derecha $U = .5\varphi(x - at)$; en la IV, la onda izquierda $U = .5\varphi(x + at)$; en la región VI la solución es la suma de la onda derecha y la onda izquierda.

Membrana vibrante (Ecuación bidimensional de ondas).

Consideramos el movimiento de una membrana tensa tal como la de un tambor.

Hagamos las siguientes suposiciones:

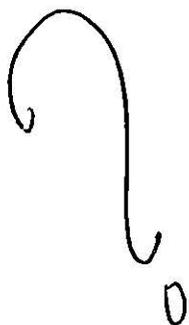
1.- La masa de la membrana por unidad de área es constante (membrana homogénea).

La membrana es perfectamente flexible y de un espesor tal que no ofrece resistencia a la flexión .

2.- La membrana se encuentra tensa y fija a lo largo de todo su perímetro en el plano xy . La tensión por unidad de longitud T causada por la extensión de la membrana es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones y no cambia durante el movimiento.

3.- La desviación $u(x, y, t)$ de la membrana durante el movimiento es pequeña comparada con el tamaño de la membrana y todos los ángulos de inclinación son pequeños.

Aunque estas condiciones no pueden encontrarse en la práctica, las vibraciones transversales de pequeña amplitud de una membrana física delgada satisfacen con mucha aproximación estas suposiciones.



Para deducir la ecuación diferencial que rige el movimiento de la membrana considérense las fuerzas que actúan sobre una pequeña porción de la membrana como se muestra en la figura anterior. Como las desviaciones de la membrana y los ángulos de inclinación son pequeños, los lados de la porción son aproximadamente iguales a Δx y Δy . La tensión T es la fuerza por unidad de longitud. Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre los lados de la porción son aproximadamente $T\Delta x$ y $T\Delta y$. Puesto que la membrana es perfectamente flexible, estas fuerzas son tangentes a la membrana.

Primero consideremos las componentes horizontales de las fuerzas. Estas componentes horizontales se obtienen multiplicando la fuerzas por los *cosenos* son muy próximos a 1. De aquí que las componentes horizontales de las fuerzas en lados opuestos son aproximadamente iguales. Por lo tanto, el movimiento de las partículas de la membrana en la dirección horizontal será despreciable. De esto se concluye que el movimiento de la membrana en puede considerarse como transversal, es decir, cada partícula se mueve verticalmente. Los componentes verticales de las fuerzas a lo largo de rectas paralelas al plano yz son

$$T\Delta y \text{sen}\beta \quad \text{y} \quad -T\Delta y \text{sen}\beta$$

Aquí se tiene un signo menos porque la fuerza de la izquierda se encuentra dirigida hacia abajo. Debido a que los ángulos son pequeños, pueden sustituirse sus *senos* por sus *tangentes*. De donde, la resultante de esas 2 componentes verticales es:

$$T\Delta y (\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha) \approx T\Delta y (\text{tan}\beta - \text{tan}\alpha) \\ = T\Delta y [U_x(x+\Delta x, y_1) - U_x(x, y_2)] \dots (1)$$

donde los subíndices x denotan las derivadas y_1 y y_2 son valores entre y y $y + \Delta y$.

Del mismo modo, la resultante de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre los otros 2 lados de la porción es:

$$T\Delta x[U_y(x_1, y+\Delta y) - U_y(x_2, y)] \dots\dots\dots(2)$$

donde x_1 y x_2 son valores entre x y $x + \Delta x$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas dadas por (1) y (2) es igual a la masa $\rho\Delta A$ de la porción por la aceleración

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$; aquí ρ es la masa de la membrana por unidad de área y $\Delta A \approx \Delta x\Delta y$ es el área de la porción. Así

$$\rho\Delta x\Delta y \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T\Delta y[U_x(x + \Delta x, y_1) - U_x(x, y_2)] + T\Delta x[U_y(x_1, y+\Delta y) - U_y(x_2, y)]$$

donde la derivada de la izquierda se evalúa en algún punto apropiado (\bar{x}, \bar{y}) correspondiente a la porción. Dividiendo entre $\rho\Delta x\Delta y$ se llega a:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{U_x(x+\Delta x, y_1) - U_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{U_y(x_1, y+\Delta y) - U_y(x_2, y)}{\Delta y} \right]$$

Si Δx y Δy se hacen tender a cero, entonces se obtiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad ; \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad \dots\dots(3)$$

Esta ecuación se llama ecuación bidimensional de onda.

También se podría escribir

$$U_{tt} = c_2 \nabla^2 U.$$

Método de Separación de variables

El método de separación de variables (también llamado de Fourier) es uno de los métodos más generalizados de resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Expondremos el método para el problema sobre las oscilaciones de una cuerda fija en sus extremos.

Estudiaremos la resolución del problema indicado con el mayor detalle posible, de este modo, buscaremos la solución de la ecuación:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad \text{o lo que es lo mismo,} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \dots (1)$$

que satisface a las condiciones de frontera (contorno) homogéneas

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

y las condiciones iniciales

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0) &= \varphi(x) \\ U_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

La ecuación (1) es lineal y homogénea; por esto la suma de soluciones particulares es también solución de esta ecuación. Si se tiene un número de soluciones particulares suficientemente grande, se puede probar, sumándolas con ciertos coeficientes, hallar la solución buscada.

Plantearemos el problema auxiliar fundamental:

Hallar la solución de la ecuación.-

$$U_{tt} = a^2 U_{xxx}$$

que no sea idénticamente nula, satisfaga a las condiciones de frontera homogéneas

$$\left. \begin{aligned} U(0, t) &= 0 \\ U(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

y se representa en forma del producto.

$$U(x, t) = X(x) T(t) \dots\dots\dots (5)$$

Donde $T(x)$ es una forma sólo de la variable x y $T(t)$, es una función sólo de la variable t .

Poniendo la forma supuesta de la solución de (5) en la ecuación (1), se obtiene

$$X'' T = \frac{1}{a^2} T'' X \quad \text{y dividiendo entre } XT,$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \dots\dots\dots (6)$$

Para que la función (5) en la ecuación (1), la igualdad (6) debe satisfacerse idénticamente es decir para cualquier valor de las variables independientes $0 < x < l, t < 0$.

El segundo miembro de la ecuación (6) es una función sólo de la variable t , y el primero, solo de x . Fijando un valor de ellos y variando el otro, se obtiene que ambos de la igualdad (6) se mantienen constantes al variar sus argumentos:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \dots \dots \dots (7)$$

donde λ es una constante, el signo negativo es por comodidad; de (7) se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias para la determinación de las funciones $X(x)$ y $T(t)$.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0 \dots \dots \dots (9)$$

Las condiciones de frontera (4) dan:

$$U(0, t) = X(0) T(t) = 0$$

$$U(l, t) = X(l) T(t) = 0$$

De aquí se deduce que $X(0) = X(l) = 0$, de otro modo sería que $T(t) \equiv 0$ y $U(x, t) \equiv 0$; y lo que queremos es hallar la solución no trivial. Para la función $T(t)$ no hay ninguna condición complementaria en el problema auxiliar fundamental.

De este modo, con respecto a la determinación de la función $X(x)$ se obtiene el problema más sencillo de los

valores propios: Hallar los valores del parámetro λ , para los cuales existen soluciones no triviales del problema.-

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) = X(l) &= 0 \end{aligned} \quad \} \dots\dots\dots (11)$$

Así como también hallar dichas soluciones. Tales valores del parámetro λ se llaman valores propios, y las soluciones no triviales que les corresponden, son funciones propias del problema (11). Este problema es llamado de Sturm-Liouville.

Se consideran las posibilidades del parámetro λ que son:

$$\lambda < 0, \quad \lambda = 0, \quad \lambda, > 0.$$

1.- Para $\lambda < 0$; el problema no posee soluciones no triviales.

La solución general de (8) tiene la forma.-

$$r^2 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \text{las raíces son } r = \pm \sqrt{\lambda}$$

Las condiciones de frontera dan:

$$X(0) = C_1 + C_2 = C$$

$$X(x) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0; \quad (\alpha = \sqrt{-\lambda l})$$

$$\rightarrow C_1 = -C_2 \quad \text{y} \quad C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$$

Consideramos el caso de que α es real y positivo, de forma que $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$.

Por esto $C_1 = 0$; $C_2 = 0$ lo que nos lleva a $X(x) \equiv 0$.

2.- Para $\lambda = 0$ tampoco hay soluciones no triviales; en este caso la ecuación (8) tiene la solución general de la forma.-

$$r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = C_1 x + C_2$$

Considerando las fronteras tenemos:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1(0) + C_2 = 0; & \rightarrow C_2 &= 0 \\ X(l) &= C_1(l) + C_2 = 0; & \text{pero } C_2 &= 0 \rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $X(x) \equiv 0$.

3.- Para $\lambda > 0$; la solución general de la ecuación (8) tiene la forma.-

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$\rightarrow X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda x} + D_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda x}$$

Considerando las condiciones frontera tenemos que:

$$X(0) = D_1 = C$$

$$X(l) = D_2 \operatorname{Sen} \sqrt{\lambda} l = C$$

Si $X(x)$ no es idénticamente nulo; entonces $D_2 \neq C$ por esto

$$\dots\dots\dots(12) \quad \operatorname{Sen} \sqrt{\lambda} l = C \quad \text{o} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$$

donde n es un entero arbitrario; por lo tanto las soluciones no triviales del problema (11) es posible sólo para valores

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (13); \quad \text{estos valores propios}$$

les corresponden las funciones propias; $X_n(x) = D_n \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{l} x$;

con D_n constante arbitraria.

Escogiendo D_n igual a la unidad tenemos

$$X_n(x) = \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{l} x \quad \dots\dots\dots(14)$$

A estos mismos valores λ_n les corresponden las soluciones de la ecuación (9)

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = C, \quad T(t) \neq C$$

$$T_n(t) = A_n \operatorname{Cos} \frac{\pi n}{l} at = E_n \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{l} at \dots\dots\dots(15)$$

Con A_n y E_n constantes arbitrarias.

Retomando el problema tenemos que las funciones

$$\begin{aligned} U_n(x, t) &= X_n(x) T_n(t) = (A_n \operatorname{Cos} \frac{\pi n}{l} at \\ &= E_n \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{l} at) \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{l} x \quad (16) \end{aligned}$$

son soluciones particulares de la ecuación (1) que satisfacen a las condiciones frontera (4) que se representan en forma de producto (5) de 2 funciones.

Estas soluciones pueden satisfacer a las condiciones iniciales (3) de nuestro problema inicial sólo para casos particulares de las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Debido a la linealidad y homogeneidad de la ecuación (1), es la suma de las soluciones particulares: (Si U_1 y U_2 son soluciones

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \dots (17)$$

también satisface a esta ecuación y a las condiciones de frontera.

Las condiciones iniciales permiten determinar A_n y B_n

$$U(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \dots (18)$$

$$U_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

De la teoría de las series de Fourier se sabe que una función arbitraria continua a trozos y derivable a trozos $f(x)$, en el intervalo $0 \leq x \leq l$, se desarrolla en serie de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \dots (19)$$

Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ satisfacen a las condiciones de desarrollo en Serie de Fourier, entonces:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x ; \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x dx , \dots (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x ; \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x dx , \dots (22)$$

La comparación de estas series con las fórmulas (18) muestra que para que se cumplan las condiciones iniciales hay que hacer que:

$$A_n = \varphi_n$$

$$B_n = \frac{\alpha}{\pi \eta a} \psi_n$$

con lo cual se determina totalmente la función (17) que nos dá la solución al problema propuesto.

Interpretación de la solución:

La función $U_n(x, t)$ puede representarse de la forma:

$$U_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$= a_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

donde
$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}; \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = - \operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}$$

Cada punto de la cuerda x_0 efectúa las oscilaciones armónicas

$$U_n(x_0, t) = a_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

con amplitud

$$a_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

El movimiento de una cuerda de este tipo se denomina onda estacionaria.

Los puntos $x = m \frac{l}{n}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), en los cuales

$$\sin \frac{\pi n}{l} x,$$

quedan inmóviles durante todo el proceso y se llaman nodos de la onda estacionaria $U_n(x, t)$.

Los puntos $x = \frac{2m + l}{2n}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n-1$), en los cuales

$\text{Sen} \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$, oscilan con la amplitud máxima a_n , y se llaman vientres de la onda estacionaria. El perfil de una onda estacionaria es en todo momento una senoide:

$$U_n(x, t) = C_n(t) \text{Sen} \frac{\pi n}{l} x, \quad \text{donde}$$

$$C_n(t) = a_n \text{Cos} \omega_n (t + \delta_n); \quad (\omega_n = \frac{\pi n}{l} a)$$

En el momento de tiempo t , en el cual $\text{Cos} \omega_n (t + \delta_n) = \pm 1$, las desviaciones alcanzan sus valores máximos, y la velocidad del movimiento es nula.

En los momentos de tiempo t , en los cuales $\text{Cos} \omega_n (t + \delta_n) = 0$, la desviación es igual a cero, y la velocidad del movimiento es máxima. Las frecuencias de las oscilaciones de todos los puntos de la cuerda coinciden y son iguales a:

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a$$

Las frecuencias ω_n se llaman frecuencias propias de las oscilaciones de la cuerda. Para las oscilaciones transversales de la cuerda

$$a^2 = \frac{T}{\rho}$$

donde T es la tensión y ρ es la densidad; por lo tanto:

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Para calcular la energía de las oscilaciones transversales de la cuerda tomamos la fórmula siguiente que se deducirá en el apéndice:

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\
 &= \frac{a^2 \pi^2}{2} \left[\int_0^l \rho \omega^2 n^2 \text{Sen}^2 \omega n (t + \delta n) \text{Sen}^2 \frac{\pi n}{l} x \right. \\
 &\quad \left. + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \text{Cos}^2 \omega n (t - \delta n) \text{Cos}^2 \frac{\pi n}{l} x \right] dx = \\
 &= \frac{a^2 \pi^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho \omega^2 n^2 \text{Sen}^2 \omega n (t + \delta n) + T \frac{\pi n}{l} \text{Cos}^2 \omega n (t + \delta n) \right]
 \end{aligned}$$

Si
$$\int_0^l \text{Sen}^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \text{Cos}^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{l}{2}$$

Utilizando la expresión para a_n , ω_n , $T = a^2 \rho$, obtenemos:

$$E_n = \frac{\rho a^2 \omega^2 n^2}{4} l = \omega^2 n^2 K \frac{A^2 n^2 + E^2 n^2}{4} ; \quad \text{con } M = l\rho \text{ es la masa de la cuerda}$$

Las oscilaciones de una cuerda son captadas generalmente por el sonido que ésta genera, se puede decir que el sonido de una cuerda es la superposición de tonos simples, que corresponden a las ondas estacionarias, en las cuales se descompone la oscilación.

Esta descomposición del sonido en tonos simples no es una operación de carácter solamente matemático. La obtención de los tonos simples se puede efectuar por vía experimental mediante resonadores.

La altura del tono depende de la frecuencia de las oscilaciones, la fuerza del tono se determina por su energía y, por consiguiente, por su amplitud. El tono más bajo que puede emitir una cuerda se determina por la frecuencia propia más baja

$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{T / \rho}$, y se llama tono principal de la cuerda. Los

demás tonos, que corresponden a frecuencias múltiplos de ω_1 , se llaman armónicos (sobretonos).

Las fórmulas $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{T / \rho}$ y $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\rho / T}$

que determinan la frecuencia y el período de la oscilación fundamental respectivamente, explican las siguientes leyes de las oscilaciones de las cuerdas, que fueron descubiertas empíricamente por Mersenne.

1.- Para las cuerdas de igual densidad e igual tensión, el período de oscilaciones es proporcional a su longitud.

2.- Si la longitud de la cuerda es fija, el período varía en forma inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión.

3.- Si la longitud y la tensión están fijas, el período varía proporcionalmente a la raíz cuadrada de la densidad lineal de la cuerda.

En el presente punto hemos considerado las ondas estacionarias que surgen en las oscilaciones de una cuerda con extremos fijos.

IV.- ECUACIONES ELÍPTICAS

(Transformadas integrales)

Se sabe que a partir de la integral de Fourier del coseno, el resultado de que bajo ciertas condiciones una función $f(x)$ se puede representar en $0 < x < \infty$, en la forma:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A \cos \lambda x d\lambda \dots\dots\dots(1)$$

en la que,

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx \dots\dots\dots(2)$$

con una ligera variación en la notación, escribiendo p en vez de λ y $f(p)$ en vez de $\frac{\pi}{2} A(\lambda)$, obtenemos

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cos px dx \dots\dots\dots(3)$$

y

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}(p) \cos px dp \dots\dots\dots(4)$$

La ecuación (3) define la transformada coseno de Fourier, $\bar{f}(p)$, de $f(x)$; mientras que (4) define la transformada coseno de Fourier inversa, $f(x)$, de $\bar{f}(p)$.

Podemos pasar, por consiguiente de $f(x) \leftrightarrow \bar{f}(p)$ por medio de este par de transformaciones. Análogamente, la integral de Fourier de Seno conduce al par:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{Sen} px dx \quad \dots\dots\dots (5)$$

y

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}(p) \operatorname{Sen} px dp \quad \dots\dots\dots (6)$$

que define la transformada seno de Fourier, $\bar{f}(p)$ de $f(x)$ y su inversa.

Tanto (3) como (5) son ejemplos particulares de la transformación

$$f(p) = \int_a^b f(x) K(p, x) dx \quad \dots\dots\dots (7)$$

en la que $\bar{f}(p)$ se define como transformada integral de la función $f(x)$ respecto de la función $K(p, x)$, con a y b constantes reales.

La función $K(p, x)$ se llama núcleo de la transformación. Eligiendo formas particulares para $K(p, x)$ y asignando valores en a y b , se obtienen distintas transformaciones. Las transformaciones integrales son particularmente importantes para la resolución de ciertos problemas en los que muchas veces es más fácil pasar a la variable p , determinar $\bar{f}(p)$ y usar la transformación inversa para recobrar la solución del problema original.

La naturaleza de la transformada inversa depende íntimamente del tipo particular de transformación que se usa. Las transformaciones seno y coseno de Fourier, Las fórmulas de inversión son relativamente simples, pero para otras transformaciones, la fórmula de inversión puede implicar una técnica de la teoría de variable compleja llamada integración sobre caminos. Una transformación en la que esto ocurre es la transformación de Laplace definida haciendo $a = 0$, $b = \infty$ y $K(p, x) = e^{-px}$; entonces tenemos que

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \dots\dots\dots (8)$$

Finalmente; se observa que la operación de efectuar una transformación integral (7), posee la propiedad de linealidad. Si suponemos que $I\{\}$ designa una operación de transformación integral de la función que se halla en el interior de las llaves, entonces:

$$I \{f(x)\} = \mathcal{F}(p) = \int_a^b f(x) K(p, x) dx \dots\dots\dots (9)$$

Si α, β son constantes arbitrarias reales y $g(x)$ es una función arbitraria para la que existe la transformada, tenemos que:

$$I \{\alpha f(x)\} = \alpha I \{f(x)\} \dots\dots\dots (10)$$

$$I \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] K(p, x) dx \dots\dots (11)$$

$$= \alpha I\{f(x)\} + \beta I\{g(x)\} \dots\dots\dots (12)$$

Las ecuaciones (10) y (12) pueban que $I\{\}$ es un operador lineal.

Ahora el operador inverso $I^{-1}\{\}$ que es tal que, si

$$I \{f(x)\} = \mathcal{F}(p) \dots\dots\dots (13)$$

entonces

$$F(x) = I^{-1} \{\mathcal{F}(p)\} \dots\dots\dots (14)$$

de (13) y (14) se tiene que:

$$I \{ I^{-1} [\bar{f}(p)] \} = \bar{f}(p) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$I^{-1} \{ I [f(x)] \} = f(x) \quad \dots\dots\dots (16)$$

Los operadores I e I^{-1} conmutan y tenemos que $II^{-1} = I^{-1}I = 1$, el operador identidad, y tomando en cuenta la linealidad de I tenemos que

$$I^{-1} \{ \alpha f(x) \} = \alpha I^{-1} \{ f(x) \} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$I^{-1} \{ \alpha f(x) + \beta g(x) \} = \alpha I^{-1} \{ f(x) \} + \beta I^{-1} \{ g(x) \} \quad \dots\dots (18)$$

Un pequeño resumen de algunas transformadas integrales y sus formulas de inversion.

a) Transformada de Laplace

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-xp} dx$$

$$2\pi i f(x) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(p) e^{xp} dp$$

donde γ es mayor que las partes reales de todas las singularidades de $\bar{f}(p)$

b) Transformada de Fourier del Seno y Coseno.

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) \text{Sen } px dx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(p) \sin xp \, dp \quad ; \text{ lo mismo para el coseno.}$$

c) Transformada de complejo de Fourier

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{ipx} \, dx$$

$$2\pi f(x) = \int_0^{\infty} f(p) e^{-ixp} \, dp$$

d) Transformada de Hankel

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(r) r J_n(pr) \, dr$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} f(p) p J_n(rp) \, dp$$

e) Transformada de Mellin

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(x) x^{p-1} \, dx$$

$$2\pi i f(x) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(p) x^{-p} \, dp$$

La función error

Una de las funciones que intervienen en la resolución de la ecuación de la conducción del calor por el método de la transformada de Laplace es la función error, $\text{erf}x$, definida por:

$$\text{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

es de particular importancia e interviene en ciertos problemas de valores de contorno en la forma $\text{erf}(a/2\sqrt{x})$, donde a es una constante real, y su transformada de Laplace es la siguiente:

$$L\{\text{erf}(a/2\sqrt{x})\} = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$$

y el complemento de la función error es

$$\text{erfc}x = 1 - \text{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du$$

Transformaciones de Seno y Coseno de Fourier

Las inversas de las transformadas seno y coseno de Fourier vienen dadas por integrales reales, mientras que las inversas de las transformaciones de Laplace precisan de una integración en el plano complejo. Por esta razón, a veces, resulta más conveniente utilizar las transformaciones seno y coseno, si bien el que se puedan aplicar o no depende de la naturaleza de la ecuación en derivadas parciales y de las condiciones contorno.

Suponemos que $U(x, t)$ es una función definida en $0 < x < \infty$, $t > 0$.

Entonces la transformada seno de Fourier de $U(x, t)$ relativa a x , esta definida por:

$$\bar{U}_s(p, t) = \int_0^{\infty} u(t, x) \operatorname{Sen} px \, dx \dots\dots\dots(1)$$

y la transformada inversa

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{U}_s(p, t) \operatorname{Sen} px \, dx \dots\dots\dots(2)$$

De igual forma definimos la transformada coseno de Fourier de $U(x, t)$ relativa a x como:

$$\bar{U}_c(p, t) = \int_0^{\infty} U(x, t) \operatorname{Cos} px \, dx \dots\dots\dots(3)$$

y transformada inversa

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{U}_c(p, t) \cos px \, dx \dots\dots\dots (4)$$

La transformada seno de $\frac{\partial u}{\partial x}$ respecto de x esta dada por:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Sen} px \, dx = \left[U \operatorname{Sen} px \right]_0^{\infty} - F \int_0^{\infty} U(x, t) \operatorname{Cos} px \, dx \dots\dots\dots (5)$$

en el supuesto de que $U(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ (ocurre en algunos problemas físicos) entonces:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Sen} px \, dx = -F \bar{U}_c(p, t) \dots\dots\dots (6)$$

De la misma forma obtenemos

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Cos} px \, dx = F \bar{U}_s(p, t) - U(0, t) \dots\dots\dots (7)$$

Suponiendo que $U(x, t) \rightarrow 0$ con $x \rightarrow \infty$

Las transformadas de la derivada segunda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se obtienen similamente, entonces:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{Sen} px \, dx = -F^2 \bar{U}_s(p, t) + p u(0, p) \dots\dots\dots (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{Cos} px \, dx = -F^2 \bar{U}_c(p, t) - \left(\frac{2u}{2x} \right)_{x=0} \dots\dots\dots (9)$$

donde también se supone que $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$

De aquí vemos que para usar estas transformaciones en la resolución de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden depende de las condiciones contorno, ya que en la transformada seno de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se requiere conocer $U(0, t)$, en la transformada Coseno de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se requiere conocer $(\frac{\partial u}{\partial x})$ en $x = 0$.

Transformadas de Laplace de derivadas

$$L \left\{ \frac{dy}{dx} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{dy}{dx} dx = y e^{-px} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} y e^{-px} dx \dots\dots (1)$$

$$= - (0) + p L \{ y(x) \} \dots\dots\dots (2)$$

$$= - y(0) + p \bar{y}(p) \dots\dots\dots (3)$$

donde $y(0)$ es el valor de $y(x)$ en $x = 0$, y hemos supuesto que $y e^{-px} \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \infty$.

De la misma forma

$$L \left\{ \frac{d^2y}{dx^2} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{dy}{dx} e^{-px} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \frac{dy}{dx} e^{-px} dx \dots\dots (4)$$

Suponiendo que $\frac{dy}{dx} e^{-px} \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \infty$

$$L \left\{ \frac{d^2y}{dx^2} \right\} = p^2 \bar{y}(p) - p y(0) - y'(0)$$

Así obtenemos la forma general

$$L \left\{ \frac{d^ny}{dx^n} \right\} = p^n \bar{y}(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

Ecuación de Laplace (1)

Una de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes que aparecen en matemáticas aplicadas es la que esta asociada con el nombre de Laplace: en 2 dimensiones

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

en 3 dimensiones

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

Por ejemplo, en un problema bidimensional de conducción de calor, la temperatura $U(x, y, t)$ debe de satisfacer la ecuación diferencial

$$\alpha^2 (U_{xxx} + U_{yyy}) = U_t \dots\dots\dots(3)$$

donde α^2 es la disipación térmica. Si existe un estado estable, U es solo una función de x y y , y la derivada respecto del tiempo desaparece; en este caso, la ecuación (3) se reduce a la ecuación (1). En forma similar, para el problema de conducción de calor de estado estable en 3 dimensiones, la temperatura debe satisfacer la forma tridimensional de la ecuación de Laplace.

Una ecuación parecida, aunque no menos importante es la ecuación de Poisson, un tanto más general:

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = f(x, y, z)$$

Ecuación de Laplace (2)

Ahora vamos a relatar como surgió la ecuación de Laplace en la física-matemática. Su nacimiento se debe a un desarrollo nada trivial de las ideas de las ciencias naturales. Un vuelco inesperado en el pensamiento de Laplace predeterminó una serie de consideraciones importantes cuyas consecuencias fueron las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético y en la actualidad, las ecuaciones de los campos relacionados con las partículas elementales.

Como se sabe, Kepler, al elaborar las observaciones de Tycho Brahe sobre el movimiento de los planetas, estableció las 3 leyes siguientes:

- 1) *Cada planeta se mueve a lo largo de una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.*
- 2) *EL radio vector que va desde el sol hasta el planeta describe áreas iguales en iguales intervalos de tiempo.*
- 3) *Los cuadrados de los tiempos insumidos en dar una vuelta completa alrededor del Sol son, para 2 planetas cualesquiera, proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.*

Más adelante Newton halló, para ellas, una expresión más sencilla; es la llamada ley de la atracción universal:

"Entre 2 cuerpos cualesquiera actúa una fuerza de atracción, directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos".

Ecuación de Laplace (3)

Las leyes de Kepler, la de Newton y la relación entre ellas se estudian con detalles en el curso de mecánica. Es asombroso, claro esta, cómo dos cuerpos que se encuentran a una enorme distancia uno del otro pueden interactuar. Esta interacción a distancia siempre pareció sorprendente; el intento de superarla, por lo visto, fué lo que condujo a Laplace a la siguiente interpretación.

La presencia de un cuerpo que atrae, implica que aparezca en todo el espacio cierta substancia cuya intensidad U en el punto (x, y, z) se calcula según la fórmula

$$U = \frac{\gamma M}{\sqrt{(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 + (Z-Z_0)^2}}$$

Aquí γ es una constante; X_0, Y_0, Z_0 son las coordenadas del cuerpo que ejerce la atracción; y M es su masa. Para calcular las componentes F_x, F_y, F_z de la fuerza de atracción que actúa sobre un cuerpo de masa igual a la unidad, ubicado en el punto de coordenadas x, y, z , hay que poner

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Como se sabe, la función U se denomina potencial del campo vectorial $\{F_x, F_y, F_z\}$.

En el caso en que haya varios cuerpos que atraigan (y suponiendo que el cuerpo de masa M_i se encuentre en el punto (x_i, y_i, z_i)). se puede calcular la fuerza por las mismas fórmulas si se toma como potencial la función

$$U = - \gamma \sum_i \frac{M_i}{\sqrt{(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 + (Z-Z_i)^2}}$$

Ecuación de Laplace (4)

Laplace propuso utilizar para el estudio de la gravitación no la propia función u , sino la ecuación diferencial que ésta satisface. Dicha ecuación puede obtenerse como sigue.

Consideramos, primeramente, solo un sumando en la fórmula de función U ,

$$U_i = r \frac{M_i}{\sqrt{(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 + (Z-Z_i)^2}}$$

y calculamos sus derivados. Para simplificar la escritura denotaremos la distancia entre los puntos (x, y, z) y (x_i, y_i, z_i) por:

$$r = \sqrt{(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 + (Z-Z_i)^2}$$

y observamos que

$$\frac{\partial r}{\partial X} = \frac{X-X_i}{\sqrt{(X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 + (Z-Z_i)^2}} = \frac{X-X_i}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial Y} = \frac{Y-Y_i}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{Z-Z_i}{r}.$$

De esta forma, las derivadas primeras serán

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = -\gamma \mu_i \frac{X - X_i}{r^3} \quad , \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = -\gamma \mu_i \frac{Y - Y_i}{r^3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = -\gamma \mu_i \frac{Z - Z_i}{r^3}$$

Ecuación de Laplace (5)

Vamos a derivarlas de nuevo:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} = \gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x-x_i)^2}{r^5} \right]$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} = \gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(y-y_i)^2}{r^5} \right]$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = \gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(z-z_i)^2}{r^5} \right]$$

Sumando estas 3 derivadas parciales, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = 0$$

Es evidente que esto más la relación $U = \sum_i U_i$ implican la igualdad

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla^2 U = 0$$

Lo cuál se denomina precisamente ecuación de Laplace.

Ecuación de Laplace (6)

La extensión hacia el potencial y fuerza debidas a una distribución continua de masa es casi directa. Si una masa de densidad $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ se encuentra distribuida en toda región \bar{K} en el espacio, entonces el potencial correspondiente en un punto que no se encuentra ocupado por la masa se define como:

$$U(x, y, z) = K \iiint_{\bar{K}} \frac{\rho}{r} dx d\eta d\zeta \quad K > 0 \quad \dots\dots(4)$$

Debido a que $\frac{1}{r}$ ($r > 0$) es una solución de (2), es decir $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$ y ρ no depende de x, y, z se obtiene

$$\nabla^2 U = K \iiint_{\bar{K}} \rho \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dx d\eta d\zeta$$

es decir el potencial gravitacional definido por (4) satisface la ecuación de Laplace en cualquier punto que no se encuentra ocupado por la materia. En electrostática, la fuerza eléctrica de atracción o repulsión entre partículas cargadas está regida por la ley de Coulomb que tiene la misma forma matemática de la ley de la gravitación de Newton. De este hecho se sigue que el campo creado por una distribución de cargas eléctricas puede describirse matemáticamente por una función de potencial que satisface la ecuación de Laplace en cualquier punto no ocupado por las cargas.

Ecuación de Laplace (7)

Puesto que no hay dependencia respecto del tiempo, en algunos de los problemas como la conducción del calor; potenciales etc; entonces no hay condiciones iniciales que deban ser satisfechas por la ecuación (1) ó (2). Sin embargo; deben satisfacer ciertas condiciones en la frontera, sobre la superficie o curva limitante de la región en la cual la ecuación diferencial debe resolverse. Como la ecuación Laplace es de segundo orden, sería plausible esperar que se requieran 2 condiciones en la frontera para determinar completamente la solución. Sin embargo éste no es el caso. Por ejemplo en el problema de conducción de calor para la barra finita, es necesario preescribir una condición en cada extremo de la barra, es decir, una condición en cada punto de la frontera. Generalizando esta observación hacia problemas multidimensionales, resulta entonces natural preescribir una condición sobre la función U , en cada punto de la frontera de la región en la que se busca una solución de la ecuación (1) o (2). La condición en la frontera más común aparece cuando el valor de U se especifica en cada punto frontera; en términos del problema de condición de calor, esto corresponde a preescribir la temperatura en la frontera. En algunos problemas, por el contrario, se especifica el valor de la derivada razón de cambio de U en la dirección normal a la frontera; la condición sobre la frontera de un cuerpo

térmicamente aislado, por ejemplo, es de este tipo. Es muy posible que aparezcan condiciones más complicadas en la frontera; por ejemplo, podría preescribirse U sobre una parte de la frontera y especificarse su derivada normal sobre el resto. El problema de encontrar una solución de la ecuación de Laplace, que tome valores dados sobre la frontera, se conoce con problema de Dirichlet.

Ecuación de Laplace (8)

En contraste si se preescriben los valores de la derivada normal sobre la frontera, el problema se conoce como problema de Neumann. Los problemas de Dirichlet y Neumann también se conocen como primero y segundo problema con valores en la frontera de la teoría del potencial, respectivamente.

En ocasiones al resolver la ecuación de Laplace con valores en la frontera al que hacerlo sobre diferentes superficies. Entonces es necesario introducir coordenadas en el espacio de modo que esas superficies puedan representarse en una forma sencilla. Esto requiere la transformación del laplaciano en otros sistemas coordenados.

Por ejemplo .- en coordenadas cilindricas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad , \quad z = z$$

tenemos que:
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

También en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) que se relacionan con las coordenadas Cartesianas

$$X = r \cos \theta \operatorname{Sen} \phi \quad , \quad Y = r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \phi \quad , \quad Z = r \cos \theta$$

entonces

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\operatorname{Sen} \theta} \left(\operatorname{Sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{Sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right]$$

Ecuación de Laplace (9)

Problema de Dirichlet para el rectángulo

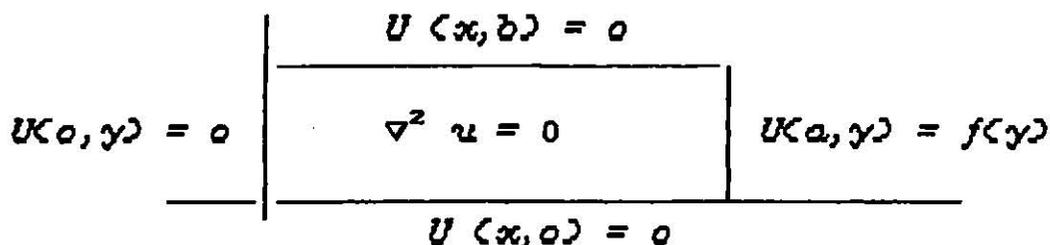
Se considera el problema de encontrar la función U que satisfaga la ecuación de Laplace

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 U(x, y) = 0$$

en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, y que también satisfaga las condiciones frontera

$$\begin{aligned} U(x, 0) = 0, \quad U(x, b) = 0 \\ U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

donde f es una función dada sobre $0 \leq y \leq b$



Para resolver éste problema, deseamos construir un conjunto fundamental de soluciones que satisfagan la ecuación diferencial parcial y las condiciones homogéneas en la frontera. Supongamos que:

$$U(x, y) = X(x) Y(y) \quad \dots\dots\dots (6)$$

sustituyendo la ecuación de Laplace

$$y \frac{d^2 x}{dx^2} + x \frac{d^2 y}{dy^2} = 0 \quad \text{y multiplicando por } \frac{1}{xy}$$

Ecuación de Laplace (10)

Tenemos que:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad \text{o} \quad \frac{X''}{X} = - \frac{Y''}{Y} = \sigma$$

donde σ es la constante de separación. Así obtenemos las 2 ecuaciones las 2 ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' - \sigma X = 0 \dots\dots(7) \quad Y'' + \sigma Y = 0 \dots\dots(8)$$

Ahora, escogemos las condiciones homogéneas en los extremos encontramos que

$$X'(0) = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$X''(0) = 0, \quad Y(b) = 0 \dots\dots\dots(10)$$

Entonces resolviendo para (8) ó $Y(y)$ sujeto a las condiciones frontera (10) con $\sigma > 0$, $\sigma \cong \lambda^2$, $\lambda > 0$

$$Y(y) = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y$$

$$Y(0) = A = 0$$

$$Y(y) = B \sin \lambda y$$

$$Y(b) = B \sin \lambda b = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda b = \pi i; \quad i=1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\lambda = \frac{\pi i}{b} \quad \text{o} \quad \sigma = \left(\frac{\pi i}{b} \right)^2 \dots\dots(11)$$

Las soluciones correspondientes son proporcionales a $\sin \left(\frac{\pi i y}{b} \right)$ o sea $Y_i(y) = B_i \sin \frac{\pi i}{b} y$

Ecuación de Laplace (11)

Ahora sustituyendo (11) en (7) tenemos que

$$X - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 X = 0 \quad \text{entonces}$$

$$X(x) = Ae^{\frac{n\pi}{b}x} + ce^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

$$X(0) = A + C = 0 \quad \text{entonces} \quad C = -A$$

$$X(x) = A \left(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x} \right) = 2A \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi}{b} x \right)$$

Entonces:

$$X_n(x) = A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{b} x$$

Así finalmente obtenemos las soluciones fundamentales

$$U_n(x, y) = \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} ; \quad n=1, 2, \dots \quad \dots (12)$$

Estas soluciones satisfacen la ecuación diferencial de Laplace y todas las condiciones homogéneas en la frontera, para cada valor de n .

Para satisfacer la condición no homogénea en la frontera restante, en $x=a$, supongamos, como es costumbre, que podemos representar la solución $U(x, y)$ de la siguiente forma:

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{Sen} n \frac{\pi x}{b} \operatorname{Sen} \frac{\pi n y}{b}, \dots (13)$$

los coeficientes C_n se determinan por la condición frontera

$$U(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{Sen} n \frac{\pi a}{b} \operatorname{Sen} \frac{\pi n y}{b} = f(y) \quad , \dots (14)$$

Por lo tanto, las cantidades $C_n \operatorname{Sen} n \left(\frac{\pi a}{b} \right)$ deben ser los coeficientes en la serie senoidal de Fourier de período $2b$ para f , y están dados por

$$C_n \operatorname{Sen} n \frac{\pi a}{b} = - \int_0^b f(y) \operatorname{Sen} \frac{\pi n y}{b} dy \quad \dots (15)$$

Problema de Dirichlet para un círculo (12)

Considere el problema al resolver la ecuación de Laplace en la región circular $r < a$, sujeta a la condición frontera $U(a, \theta) = f(\theta)$ (16)

donde f es una función dada, sobre $0 \leq \theta < 2\pi$. En coordenadas polares, la ecuación de Laplace toma la forma

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} = 0 \quad \dots \quad (17)$$

Para completar el enunciado del problema, notamos que, para que $U(r, \theta)$ sea uniforme, es necesario que U sea periódica en θ con período 2π . Además $U(r, \theta)$ debe ser finita en cada punto para el cual $r \leq a$, ya que esta resultará importante posteriormente.

Para aplicar el método de separación de variables a este problema, supondremos que

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \dots\dots\dots (18)$$

Se sustituye por U en (17) lo cual dá

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0 \quad \text{o bien}$$

$$r \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Theta''}{\Theta} = \sigma \quad \dots\dots (19)$$

donde σ es la constante de separación.

Ecuación de Laplace (13)

Así, obtenemos las 2 ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2 R^{11} + rR^1 - \sigma R = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$\Theta^{11} + \sigma\Theta = 0 \dots\dots\dots (21)$$

En este problema no hay condiciones homogéneas en la frontera; sin embargo, recuerde que las soluciones deben ser acotadas y también periódicas en Θ , con período 2π . Se consideran las 3 posibilidades $\sigma > 0$, $\sigma = 0$, $\sigma < 0$

Si $\sigma < 0$, sea $\sigma = -\lambda^2$, donde $\lambda > 0$. Entonces (21) queda

$$\Theta^{11} - \lambda^2\Theta = 0, \text{ por consecuencia,}$$

$$\Theta(\Theta) = C_1 e^{\lambda\Theta} + C_2 e^{-\lambda\Theta} \dots\dots\dots (22)$$

de donde, $\Theta(\Theta)$ puede ser periódica sólo si $C_1=C_2=0$, entonces σ no es negativa.

Si $\sigma=0$, entonces la ec.(21) queda $\Theta^{11} = 0$, por lo tanto,

$$\Theta(\Theta) = C_1 + C_2\Theta \dots\dots\dots (23)$$

para que $\Theta(\Theta)$ sea periódica debemos tener $C_2 = 0$, de modo que $\Theta(\Theta)$ sea constante. Además, para $\sigma=0$, la ec. (20) queda

$$r^2 R^{11} + rR^1 = 0 \dots\dots\dots (24)$$

Ecuación del tipo de Euler con solución

$$R(r) = K_1 + K_2 \ln r \dots\dots\dots (25)$$

Ecuación de Laplace (14)

El término logarítmico no puede ser aceptado, si $U(r, \theta)$ debe permanecer finita cuando $r \rightarrow 0$; de donde, $K_2 = 0$. Así, correspondiendo a $\sigma = 0$, obtenemos la solución

$$U_0(r, \theta) = 1 \dots\dots\dots (26)$$

Si $\sigma > 0$, hacemos $\sigma = \lambda^2$ donde $\lambda > 0$. Entonces (20) y (21) quedan:

$$r^2 R'' + r^1 R' - \lambda^2 r^0 = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$\theta'' + \lambda^2 \theta = 0 \dots\dots\dots (28)$$

La ecuación (27) es de tipo Euler y tiene la solución

$$R(r) = K_1 r^\lambda + K_2 r^{-\lambda} \dots\dots\dots (29)$$

y la ecuación (28) tiene la solución

$$\theta(\theta) = C_1 \text{Sen } \lambda \theta + C_2 \text{Cos } \lambda \theta \dots\dots\dots (30)$$

Para que (30) sea periódica, con período 2π , es necesario que λ sea un entero positivo n . Con $\lambda = n$ se deduce que debe descotarse la solución r en (29), ya que se vuelve no acotada cuando $r \rightarrow 0$. Como consecuencia, $K_2 = 0$ y las soluciones apropiadas de (17) son:

$$U_n(r, \theta) = r^n \text{Cos } n \theta ; V_n(r, \theta) = r^n \text{Sen } n \theta ; n = 1, 2, \dots \dots\dots (31)$$

Estas soluciones, junto con $U_0(r, \theta) = 1$, forman un conjunto de soluciones fundamentales para el presente problema.

Ecuación de Laplace (15)

Ahora suponemos que U puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones fundamentales; es decir,

$$U(a, \theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n \cos n\theta + K_n \sin n\theta)$$

La condición en la frontera (16) entonces requiere que

$$U(a, \theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (C_n \cos n\theta + K_n \sin n\theta) = f(\theta) \dots (33)$$

para $0 \leq \theta < 2\pi$. La función f puede extenderse fuera de este intervalo, de modo que sea periódica de período 2π , y, por tanto, tener una serie de Fourier de la forma (33). Puesto que la función extendida tiene período 2π , podemos calcular sus coeficientes de Fourier, integrando sobre cualquier período de la función. En particular, es conveniente usar el intervalo original $(0, 2\pi)$; entonces,

$$a^n C_n + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n=0, 1, 2, \dots \dots (34)$$

$$a^n K_n + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n=0, 1, 2, \dots \dots (35)$$

Eligiendo estos coeficientes, la ecuación (32) representa la solución del problema con valores en la frontera de las ecuaciones (16) y (17).

V.- ECUACIONES PARABOLICAS

MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Encontrar una solución de la ecuación de conducción del calor (solución acotada)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (x>0, t>0) \dots\dots\dots (1)$$

con $U(0, t) = 0$ y $U(x, 0) = U_0$, U_0 es una constante.

Si tomamos la transformada de Laplace de (1) respecto a t , tenemos que:

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x, p) = \frac{1}{K} [p \bar{u}(x, p) - u(x, 0)] \dots\dots\dots (2)$$

$$= \frac{F}{K} U(x, p) \dots\dots\dots (3)$$

porque $u(x, 0) = 0$

entonces:

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{U}(x, p) - \frac{F}{K} \bar{U}(x, p) = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{F}{K} = 0 \quad ; \quad \lambda = \sqrt{\frac{F}{K}} \quad ; \quad \text{entonces}$$

$$U(x, p) = A e^{\lambda(x-p/K)^{1/2}} + B e^{-\lambda(x-p/K)^{1/2}} \dots\dots\dots (4)$$

con A y B constantes de integración. Puesto que nos piden una solución acotada $u(x, t)$ debemos imponer también que $U(x, p)$ sea acotada. Entonces es necesario hacer $A = 0$, y como $U(0, t) = U_0$, tenemos;

$$U(0, p) = \int U_0 e^{-pt} dt = \frac{U_0}{p} \dots (5)$$

La solución (4) toma la forma de:

$$u(x, p) = \frac{U_0}{p} e^{-x(p/k)^{1/2}} \dots (6)$$

utilizando el resultado de la función error, y un pequeño cambio de notación podemos encontrar la transformada inversa con respecto a p de (6)

$$\begin{aligned} U(x, y) &= U_0 L^{-1} \left\{ \frac{e^{-(x\sqrt{k})\sqrt{p}}}{p} \right\} \\ &= U_0 \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) \\ &= U_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-\lambda^2} d\lambda \right) \end{aligned}$$

Integral de Fourier

Las propiedades de las series de Fourier, permiten efectuar un desarrollo en serie de cualquier función periódica que satisfaga las condiciones de Dirichlet y determinar el comportamiento de numerosos sistemas eléctricos y mecánicos, bajo la acción de una perturbación cualquiera de tipo periódico. Pero en muchos casos la fuerza o tensión aplicada a un sistema no es periódica, sino aperiódica, como por ejemplo, un solo impulso que no se repite. Este tipo de funciones no pueden estudiarse mediante una serie de Fourier, ya que, mediante estas últimas, solo pueden definir necesariamente funciones periódicas.

Sin embargo, viendo cuál es el límite (en caso de existir) a que tiende una serie de Fourier cuando el período de la función se hace infinito, quizá se pueda obtener un medio muy adecuado de representar una función aperiódica.

Supongamos que una función $f(x)$, de período λ , está dada por la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\pi n x / \lambda) + b_n \sin(\pi n x / \lambda)]$$

Los coeficientes a_0 , a_n y b_n se obtienen multiplicando esta serie sucesivamente por dx , $\cos(\pi n x / \lambda) dx$ y $\sin(\pi n x / \lambda) dx$, e integrando con respecto a x entre $-\pi\lambda$ y $\pi\lambda$.

Puesto que las funciones circulares son ortogonales, es decir,

$$\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} \frac{\text{Sen } \frac{\pi x}{\lambda}}{\text{Cos } \frac{\pi x}{\lambda}} dx = 0$$

$$\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} \frac{\text{Sen } \frac{\pi x}{\lambda}}{\text{Cos } \frac{\pi x}{\lambda}} \frac{\text{Cos } \frac{\pi x}{\lambda}}{\text{Sen } \frac{\pi x}{\lambda}} dx = 0$$

$$\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} \frac{\text{Sen } \frac{\pi x}{\lambda}}{\text{Cos } \frac{\pi x}{\lambda}} \frac{\text{Cos } \frac{\pi x}{\lambda}}{\text{Sen } \frac{\pi x}{\lambda}} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi\lambda & m = n \end{cases}$$

de este proceso se obtiene

$$\pi\lambda a_0 = \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x) dx$$

$$\pi\lambda a_n = \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x) \text{Cos} \left(\frac{\pi x}{\lambda} \right) dx$$

$$\pi\lambda b_n = \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x) \text{Sen} \left(\frac{\pi x}{\lambda} \right) dx$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x') dx' + \frac{1}{\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x') \text{Cos} \frac{\pi(x-x')}{\lambda} dx'$$

haciendo $\frac{\pi}{\lambda} = \alpha$, $\frac{1}{\lambda} = \delta\alpha$ y haciendo tender a λ a infinito, la suma se convierte formalmente en una integral y

obtenemos:

$$\pi f(x) = \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos \alpha(x - x') dx'$$

que es la fórmula integral de Fourier. Es suficiente que $f(x)$ satisfaga las condiciones de Dirichlet en un intervalo finito y que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ sea absolutamente convergente.

Son tipos comunes de funciones que satisfagan las condiciones de Dirichlet las que poseen únicamente un número finito de máximos, mínimos y discontinuidades ordinarias, o las funciones de variación limitada en un intervalo finito.

Ecuación de la difusión

Si un medio está lleno de gas de modo no uniforme, tiene lugar la difusión de éste de los lugares de mayor concentración a los de menor concentración de la sustancia diluida en el volumen no es constante.

Analizamos el proceso de difusión en un tubo vacío, o en un tubo lleno de un medio poroso, suponiendo que en todo momento de tiempo la concentración del gas de la solución es igual en cada sección. Entonces, el proceso de difusión puede ser descrito mediante la función $U(x, t)$, que representa la concentración en el corte x en el momento de tiempo t .

Segun la ley de Nernst, la masa de gas que pasa por la sección x durante el intervalo de tiempo $(t, t+\Delta t)$ es igual a:

$$dG = - D \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) S dt = W s dt,$$

$$W = - D \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \dots\dots\dots (1)$$

donde D es el coeficiente de difusión, S la superficie del corte del tubo, $W(x, t)$, la densidad del flujo de difusión, igual a la masa de gas que pasa en la unidad de tiempo por la unidad de superficie.

Por definición de concentración, la cantidad de gas en el volumen V es igual a:

$$G = \rho V ;$$

de aquí se obtiene que la variación de masa del gas en el segmento del tubo (x_1, x_2) , al variar la concentración en Δu , es igual a:

$$\Delta G = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \Delta u \cdot s dx$$

donde $\rho(x)$ es el coeficiente de porosidad; siendo esta la relación entre el volumen de los poros y el volumen total V_0 , en nuestro caso; a $s dx$.

Escribamos la ecuación de balance de la masa de gas en el segmento (x_1, x_2) durante un intervalo de tiempo (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} & s \int_{t_1}^{t_2} [D(x_2) - (x_2, \tau) - D(x_1) - (x_1, \tau)] d\tau \\ &= s \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [U(x, t_2) - U(x, t_1)] dx \end{aligned}$$

Obteniendo a partir de esta ecuación, la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial u}{\partial x} \right] = c \frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

Esta es totalmente análoga a la ecuación de la conducción del calor. Al deducir esta ecuación, hemos considerado que en el tubo no hay fuentes de sustancias y que no hay difusión a través de las paredes del tubo.

Si el coeficiente de difusión es constante, la ecuación de la difusión adquiere la forma

$$U_t = a^2 U_{xx} \quad , \quad \text{con } a^2 = \frac{D}{C}$$

Si el coeficiente de porosidad es $\sigma = 1$, y el de difusión es constante, la ecuación de la difusión tiene la forma:

$$U_t = DU_{xx}$$

Conducción del calor

Para obtener la ecuación del flujo de calor; primero hay que tomar en cuenta algunas disquisiciones físicas, el medio en el que estudiaremos los procesos de propagación del calor debe estar caracterizado por la llamada ecuación térmica de estado $E = E(t)$, por la densidad $\rho = \rho(x, y, z)$ y por el coeficiente de conductividad térmica $K = K(x, y, z)$.

T es la temperatura; $E(T)$, la energía interna del cuerpo contenida en unidad de masa si se supone a esta última calentada hasta una temperatura T . Se puede estudiar un medio con propiedades térmicas que varíen de un punto del espacio a otro; en este caso la ecuación de estado tiene la forma más general $E = E(x, y, z, T)$. La cantidad de calor encerrada en el cuerpo infinitamente pequeño

$$x_0 - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\Delta x}{2}$$

$$y_0 - \frac{\Delta y}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{\Delta y}{2}$$

$$z_0 - \frac{\Delta z}{2} \leq z \leq z_0 + \frac{\Delta z}{2}$$

en el momento t es igual

$$\rho(x_0, y_0, z_0) E(x_0, y_0, z_0, T(t)) \Delta x \Delta y \Delta z$$

La variación de esta cantidad de calor durante un tiempo Δt será igual a

$$\rho(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial E(x_0, y_0, z_0, T)}{\partial t} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$$

Esta variación puede tener lugar sólo debido a que el calor sale o bien entra por la frontera del cuerpo que hemos separado, si suponemos, además, que no tiene lugar ni emisión ni absorción de calor.

La cantidad de calor que pasa por una sección ΔS durante un tiempo Δt , es igual a

$$K \frac{\partial T}{\partial n} \Delta t \Delta S$$

Aquí K es el coeficiente de conductividad térmica en el punto por el cual hemos trazado nuestra sección infinitamente pequeña, y $\frac{\partial T}{\partial n}$ es la derivada de la temperatura con respecto a la normal en dicha sección. El calor va de la parte que tiene temperatura más elevada a la que tiene más baja.

La fórmula que escribimos para el flujo térmico representa la Ley de Newton de conducción del calor en un medio isotrópico. Esta Ley es el resultado de la sistematización de una gran cantidad de datos empíricos.

Escribimos los flujos que pasan por las superficies

$$x = x_0 \pm \frac{\Delta x}{2}$$

$$y = y_0 \pm \frac{\Delta y}{2}$$

$$z = z_0 \pm \frac{\Delta z}{2}$$

que delimitan nuestro cuerpo.

La cantidad de calor que penetra por la superficie

$$x = x_0 + \frac{\Delta x}{2} \text{ es igual a:}$$

$$+ K \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\substack{\Delta t \Delta y \Delta z \\ x=x_0+\Delta x/2 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}$$

y por la superficie $x = x_0 - \Delta x/2$, es igual a:

$$- K \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\substack{\Delta t \Delta y \Delta z \\ x=x_0-\Delta x/2 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}$$

como resultado, obtenemos que la cantidad total de calor que penetró nuestro cuerpo a través de estas dos paredes será igual a:

$$\approx \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \right] \Delta x \Delta t \Delta y \Delta z$$

Análogamente, la cantidad de calor que penetrará en el cuerpo por las paredes $y=y_0 \pm \Delta y/2$, $z=z_0 \pm \Delta z/2$ durante un tiempo Δt , será igual a:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

respectivamente.

Sumando todos los flujos entrantes de calor e igualando su total al cambio de energía interna, tenemos que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t =$$

$$= \rho(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial E(x_0, y_0, z_0, T)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Simplificando ambos miembros entre $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ y observando que el punto (x_0, y_0, z_0) puede ser escogido arbitrariamente (por lo cual se puede omitir el subíndice "o") llegamos a la forma definitiva de la ecuación del calor:

$$\rho(x, y, z) \frac{\partial E(x, y, z, T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

La hipótesis sobre las funciones que figuran en ella son las siguientes:

$$\rho > 0, \frac{\partial E}{\partial T} > 0, K > 0$$

Estas condiciones representan una generalización de los datos empíricos.

A veces se escribe la ecuación del calor así:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

denotando por $C(x, y, z)$ la expresión $\rho \frac{\partial E}{\partial T}$. La magnitud C , se denomina calor específico.

Si el calor específico C y el coeficiente de conductividad térmica K no dependen de T, x, y, z , es decir, si son constantes, la ecuación se puede reescribir como sigue:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{C} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

llamando $\frac{K}{C}$ coeficiente de conductividad de temperatura.

Es interesante considerar el caso de distribución estacionaria de temperatura, o sea, cuando $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Si $K = \text{cte.}$, dicha distribución se describe por la solución $T(x, y, z)$ de la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

El problema de Dirichlet para esta ecuación consiste en hallar la distribución (estacionaria) de temperatura dentro de un cuerpo dado conociendo los valores de T en la frontera.

Si el cuerpo es un cilindro alto, con generatriz paralela al eje z , y si a lo largo de cada generatriz del borde la temperatura es constante, se puede suponer que la distribución de temperatura cerca de la sección horizontal media del cilindro casi no depende de z , por lo tanto, puede ser descrita mediante la solución $T = T(x, y)$ de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. Conociendo la temperatura en cada generatriz del cilindro, $T(R \cos \theta, R \sin \theta)$, podemos determinar $T(x, y)$ dentro del cilindro por la fórmula de Poisson, es decir, podemos determinarla dentro del círculo correspondiente del plano de las variables x, y .

Si el cuerpo representa una franja estrecha entre 2 planos paralelos próximos, sobre los cuales se mantiene una temperatura constante (diferente en cada plano), la distribución estacionaria de temperatura $T(x)$ entre los planos $x = x_1, x = x_2$, satisface la ecuación:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

La solución general de ésta ecuación diferencial ordinaria es de la forma.

$$T = b_1x + b_2$$

Las constantes b_1 , b_2 deben ser halladas a partir de las condiciones de frontera, o sea las temperaturas en los planos extremos.

Al determinarlas, obtenemos que:

$$T = \frac{(\kappa_2 - x)T_1 + (x - \kappa_1)T_2}{\kappa_2 - \kappa_1},$$

donde

$$T_1 = T(\kappa_1),$$

$$T_2 = T(\kappa_2).$$

Ecuación de las oscilaciones eléctricas en los cables

El paso de la corriente eléctrica por un cable con parámetros distribuidos se caracteriza por la intensidad de la corriente i y por la tensión v , que son funciones de la posición del punto x y del tiempo t . Aplicando la ley de Ohm a un segmento de longitud dx , se puede escribir que la caída de tensión en el elemento de cable dx es igual a la suma de las fuerzas electromotrices:

$$-Vx \, dx = iR \, dx + it \, L \, dx \dots\dots\dots(1)$$

en donde R y L son la resistencia y el coeficiente de auto inducción, calculadas para la unidad de longitud.

La cantidad de electricidad que pasa por el elemento de cable dx durante el tiempo dt ,

$$\left[i(x, t) - i(x+dx, t) \right] dt = -ix \, dx \, dt \dots\dots\dots(2)$$

es igual a la suma de la cantidad de electricidad necesaria para cargar el elemento de cable dx y la cantidad que se pierde como consecuencia de la imperfección de la aislación

$$C \left[v(x, t+dt) - v(x, t) \right] dx + Gdx \, vdt = (CV + Gv) dx \, dt \dots\dots(3)$$

donde C y G son los coeficientes de capacidad y de pérdida, calculadas para la unidad de longitud; además, se considera que la magnitud de las pérdidas es proporcional a la tensión en el punto considerado del cable.

De las fórmulas (1), (2), (3) se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} ix + Cx + GV &= 0 \\ Vx + Lii + Ri &= 0 \end{aligned} \quad \} \dots\dots\dots (4)$$

llamado sistema de ecuaciones telegráficas, estas ecuaciones son aproximadamente dentro de los límites de la teoría del campo electromagnético, puesto que no consideran las oscilaciones electromagnéticas en el medio que rodea al cable.

Para obtener una sola ecuación, que permita determinar la función v , derivamos la primera igualdad de (4) respecto a x , la segunda respecto a t , multiplicando además por σ . Efectuando la resta, bajo la hipótesis de que los coeficientes permanecen constantes, hallamos:

$$\sigma ixx + GVx - CLitt - GRit = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Sustituyendo Vx por su valor, dado por la segunda ecuación de (4), obtenemos la ecuación para la intensidad de la corriente:

$$\sigma ixx = CL itt + (CR + GL) it + GRi \quad \dots\dots\dots (6)$$

Análoga forma tiene la ecuación para la tensión:

$$V_{xxx} = CLV_{tt} + (CR + GL) V_t + GRV \dots\dots\dots (7)$$

La ecuación (6) ó (7) se llama ecuación telegráfica. Si se pueden despreciar las pérdidas a través de la aislación y si la resistencia es muy pequeña ($G \cong R \cong 0$), obtenemos la conocida ecuación de las oscilaciones

$$V_{tt} = a^2 V_{xxx} ; \text{ con } a = \sqrt{1/LC}$$

VI.- APLICACIONES

Conducción del calor en una barra; con condiciones no homogéneas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\partial^2} \frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

con las condiciones

$$U(0, t) = T_1 \quad ; \quad U(l, t) = T_2$$

$$U(x, 0) = f(x) \quad ; \quad x \in [0, l]$$

Si proponemos como solución de (1); el método de separación de variables.

$$U(x, t) = X(x) T(t)$$

obtenemos que:

$$U(l, t) = X(l) T(t) = T_2$$

$$U(0, t) = X(0) T(t) = T_1 \quad \rightarrow \quad X(0) = \frac{T_1}{T(t)} ;$$

no se puede usar el método de separación de variables porque $X(0)$ depende de t .

Entonces buscaremos la solución en forma de la suma:

$$U(x, t) = V(x) + W(x, t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

donde $V(x)$ es la temperatura estacionaria y $W(x, t)$; es la desviación de dicha temperatura.

Para las funciones $V(x)$ y $W(x, t)$; tendremos las siguientes condiciones:

$$V''(x) = Ax + B$$

$$V(0) = T_1 = B$$

$$V(l) = Al + T_1 = T_2$$

entonces, la solución del estado estacionario

$$V(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1$$

$$A = \frac{T_2 - T_1}{l}$$

$$U(x, t) = V(x) + W(x, t)$$

$$W(0, t) = U(0, t) - V(0) = T_1 - T_1 = 0$$

$$W(0, t) = 0$$

$$W(l, T) = 0$$

$$W(l, t) = U(l, t) - V(l) = T_2 - T_2 = 0 \quad ;$$

$$W(x, 0) = f(x) - \left[\frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1 \right]$$

entonces

$$W(x, t) = U(x, t) - V(x)$$

La función $W(x, t)$ se halla por el método de separación de variables; con las condiciones encontradas.

$$W(x, t) = X(x) T(t)$$

$$T(t) \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2} X \frac{dT}{dt} \quad ; \quad \text{multiplicado por } \frac{1}{X(x)T(t)}$$

obtenemos que:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt}$$

haciendo

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \sigma X = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dT}{dt} - \alpha^2 \sigma T = 0$$

Tenemos 3 casos $\sigma=0$, $\sigma>0$, $\sigma<0$

$$\sigma = 0$$

$$X(x) = Ax + B$$

$$X(0) = 0 \quad ; \quad X(l) = B = 0 \quad ; \quad X(x) = Ax$$

$$X(t) = 0 = At \rightarrow 0$$

entonces se descarta.

Lo mismo para $\sigma > 0$

y para $\sigma < 0$, $\sigma = -\lambda^2$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + \lambda^2 = 0 \quad ; \quad r = \pm \lambda i$

$$\rightarrow X(x) = Ae^{\lambda i x} + Be^{-\lambda i x}$$

$$X(0) = A + B = 0 \quad ; \quad X(l) = Ae^{\lambda il} + Be^{-\lambda il}$$

$$\left| \begin{array}{cc} e^{i\lambda l} & e^{-i\lambda l} \end{array} \right| = 0 \quad \rightarrow \quad e^{\lambda il} - e^{-\lambda il} = 0$$

Sea $\lambda = \mu + i\nu$; u y v reales; entonces

$$e^{-i\mu l + \nu l} - e^{i\mu l - \nu l} = 0$$

$$e^{\nu l} [\cos(\mu l) - i\sin(\mu l)] e^{-\nu l} + e^{-\nu l} [\cos(\mu l) + i\sin(\mu l)] = 0$$

$$\cos(\mu l)[e^{\nu l} - e^{-\nu l}] + i\sin(\mu l)[-e^{\nu l} - e^{-\nu l}] = 0$$

$$\rightarrow \mu l = n\pi \quad ; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\mu = \frac{n\pi}{l} \quad ; \quad e^{\nu l} - e^{-\nu l} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{\nu l} = e^{-\nu l} \rightarrow e^{2\nu l} = 1$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \nu = 0 \\ \lambda &= \frac{n\pi}{l} . \end{aligned}$$

entonces:

$$X(x) = A \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$X(0) = A = 0 \quad ;$$

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Ahora tenemos que:

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \alpha^2 T$$

cuya solución es la siguiente:

$$\ln T = \frac{-n^2 \pi^2}{l^2} \alpha^2 t + C$$

$$- \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \alpha^2 t$$

$$T_n(t) = A_n e$$

entonces:

$$W_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \operatorname{Sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$W(x, 0) = C_n \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x, t) = \sum C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \operatorname{Sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$f(x) - \left[\frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{l} x$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(x) - \frac{T_2 - T_1}{l} x - T_1 \operatorname{Sen} \right] \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$\rightarrow U(x, t) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1 + W(x, t)$$

Mecánica Cuántica

a) *Ecuación de Schrödinger*

b) *Oscilador armónico*

A) En la mecánica cuántica, el comportamiento de una partícula que se halla en un campo de fuerzas potenciales se describe por la ecuación de Schrödinger.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + U(x, y, z, t) \dots \dots (1)$$

donde $\hbar = 1.05 \times 10^{-27}$ erg.seg es la constante de Planck, $i = \sqrt{-1}$, μ = masa de la partícula, U su energía potencial en el campo de fuerzas; $\psi = \psi(x, y, z, t)$, la función ondulatoria.

Si las fuerzas no dependen del tiempo, $U = U(x, y, z)$ son posibles estados estacionarios con un estado dado de la energía, es decir, existen soluciones del tipo:

$$\psi = \psi^0(x, y, z) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}, \dots \dots \dots (2)$$

siendo E la energía total de la partícula. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1). se obtiene la segunda ecuación de Schrödinger

$$\nabla \psi^{\circ} + \frac{2u}{\lambda^2} (\mathcal{E}-U) \psi \doteq 0 \dots\dots\dots (3)$$

En la cual \mathcal{E} hace las veces de valor propio, que debe ser terminado. Escribimos ahora ψ en lugar de ψ° :

$$\nabla \psi + \frac{\partial u \mathcal{E}}{\lambda^2} \psi = 0$$

en el caso de ausencia del campo de fuerzas $U = 0$.

La ecuación (4) tiene una gran similitud con la ecuación ondulatoria de la física clásica:

$$\nabla \psi + k^2 \psi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\partial \pi}{\lambda}$ es el número ondulatorio y λ , la longitud de onda. Sin embargo ésta similitud es puramente superficial y formal, en virtud del distinto significado físico.

En la ecuación de Schödinger tiene un significado físico directo no la propia función ψ , sino $|\psi|^2$, la cual se interpreta desde un punto de vista estadístico: la expresión $|\psi|^2 dx dy dz$ significa la posibilidad de que la partícula se halle dentro del volumen elemental $dx dy dz$, en el punto (x, y, z) del espacio.

En correspondencia con esto, la normalización de las funciones propias, que se aplica con frecuencia con fines de sencillez matemática, ahora adquiere un significado fundamental. La condición de normalización

$$\iiint |\psi|^2 dx dy dz = 1$$

Significa que la partícula se halla en cierto lugar del espacio y, por esto, la posibilidad de hallarla en algún punto de éste es igual a 1.

B) Oscilador armónico.

La ecuación de Schorödinger para el oscilador armónico adquiere la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (E-U) \psi = 0$$

donde $U = \frac{\mu \omega^2}{2} x^2$, y ω es la frecuencia propia del oscilador.

El problema consiste en la dterminación de los estados estacionarios, es decir, el espectro de los valores propios de la energía E y las funciones propias correspondientes ψ , a partir de la ecuación

$$\psi'' + \frac{\partial \mu}{\hbar^2} \left(E - \frac{\mu \omega^2}{2} x^2 \right) \psi = 0$$

con la condición complementaria de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

Introduciendo las notaciones

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{2E}{\omega_0} \\ X_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}} \\ \xi &= \frac{x}{X_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

obtenida la función $\psi = \psi(\xi)$ mediante transformaciones, se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \dots\dots\dots (3)$$

con la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{X_0} \dots\dots\dots (4)$$

Las soluciones de este problema serán las funciones

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{X_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{X_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{X_0}\right)}{\sqrt{2^n} n! \sqrt{\pi}}$$

que corresponden a los valores propios

$$\lambda_n = 2n + 1$$

Volviendo a las notaciones originales, se halla que:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{X_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{X_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{X_0}\right)}{\sqrt{2^n} n! \sqrt{\pi}} \dots\dots\dots (5)$$

Entonces:

$$E_n = \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots (6)$$

en la mecánica clásica la energía del oscilador es:

$$E = \frac{Px^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} x^2$$

donde Px es el impulso de la partícula, puede tomar una serie continua de valores.

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, al energía del oscilador, como se muestra en (6), puede tomar solo una serie discreta de valores E_n . En este caso se dice que la energía se cuantifica.

El número n , que determina el número del nivel cuántico, es llamado número cuántico principal. En el estudio más bajo, para $n=0$, la energía del oscilador es diferente de cero e igual a

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

CIV) Resolver la ecuación la ecuación de onda; por medio de la transformada de Laplace

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \dots\dots\dots(1)$$

con las condiciones

$$U(x, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < \infty \quad , \quad 0 < t < \infty \dots\dots(2)$$

y que $U(0, t) = A \cdot \text{Sen } \omega t$; $t > 0$; $U(x, t)$ sea acotado $|U(x, t)| < M$.

Aplicando la transformada de Laplace respecto a t .

$$\int \left\{ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{C^2} \int \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-pt} dt = \frac{1}{C^2} p^2 \int \{U\} - p U(0) - U(0)'$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\int U e^{-pt} dt \right] = \frac{1}{C^2} p^2 x \{U\}$$

entonces:

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{U}(x, p) = \frac{p^2}{C^2} \bar{U}(x, p)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{U} - \frac{p^2}{C^2} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

donde la solución de (3) es:

$$\bar{U}(x, p) = C_1 e^{\frac{p}{c} x} + C_2 e^{-\frac{p}{c} x}$$

Entonces si \bar{U} es acotada \bar{U} también lo es ; tenemos que:

$$\mathcal{L}\{U\} = \left| \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt \right| \leq \left| \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |U| e^{-pt} dt =$$

$$\left\langle \int_0^{\infty} M e^{-pt} dt = M \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{p} \right.$$

se debe tomar $C_1 = 0$, puesto que cuando $x \rightarrow \infty$;

$$\bar{U}(x, p) = C_1 e^{-\frac{p}{c} x} + C_2 e^{\frac{p}{c} x}$$

No es acotada; entonces:

$$\bar{U}(x, p) = C_2 e^{-\frac{p}{c} x}$$

Aplicando la transformada de Laplace, a la condición frontera tenemos que:

$$\mathcal{L}\{U(0, t)\} = \mathcal{L}\{A \cdot \text{Sen}(ut)\} = A \cdot \mathcal{L}\{\text{Sen}(ut)\} = A \cdot \left(\frac{u}{p^2 + u^2} \right) \bar{U}(0, p)$$

entonces sustituyendo en (4) obtenemos

$$U(0, p) = C_2 = \frac{A \cdot u}{p^2 + u^2}, \text{ entonces}$$

Ahora aplicando la fórmula de inversión $\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{U}(x,p) \} = U(x,t)$ tenemos:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[\frac{A_0 u}{p^2 + u^2} e^{-\left(\frac{p}{c}\right)x} \right] e^{pt} dp$$

entonces

$$U(x,t) = A_0 u \int_0^{\infty} \frac{e^{p(t-x/c)}}{p^2 + u^2} dp$$

si para $t - \frac{x}{c} < 0$; $U(x,t) = 0 \rightarrow t < \frac{x}{c}$

para $t - \frac{x}{c} > 0$; empleamos $I = \sum \text{Res} \frac{A_0 u}{p^2 + u^2} e^{p(t-x/c)}$

o sea mediante residuos y polos. Entonces

$$I = A_0 u \left\{ \text{Res}_{p=i u} (\quad) + \text{Res}_{p=-i u} (\quad) \right\}$$

$$\text{Res}_{p=i u} = \lim_{p \rightarrow i u} (p - i u) \frac{e^{p(t-x/c)}}{(p+i u)(p-i u)} = \frac{e^{i u(t-x/c)}}{2 i u}$$

$$Res = \lim_{p \rightarrow -i\omega} (p + i\omega) \frac{e^{p(t-x/a)}}{(p - i\omega)(p + i\omega)} = \frac{e^{-i\omega(t-x/a)}}{-2i\omega}$$

entonces:

$$I = A_0 \omega \left[\frac{e^{i\omega(t-x/a)} - e^{-i\omega(t-x/a)}}{2i\omega} \right] = A_0 \text{Sen}[\omega(t - \frac{x}{a})]$$

por lo tanto:

$$U(x, t) = A_0 \text{Sen}[\omega(t - \frac{x}{a})]$$

V.- En el ejemplo dado en la sección de ecuaciones parabólicas; sobre resolver la ecuación de conducción del calor

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial U}{\partial t} \quad \dots (1)$$

con las condiciones $U(0, t) = U_0 = \text{cte}$; $U(x, 0) = 0$ (2)

Resuelto en aquella sección por medio de la transformada de Laplace; se hará ahora por medio de una transformación seno. Esto es porque para una transformación seno se requiere conocer $U(0, t)$; mientras que para una transformación coseno se requiere conocer $\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0}$.

Aplicando la transformada a $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, obtenemos,

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{sen } px \, dx = -p^2 U_s(p, t) + pU(0, t) \quad \dots (3)$$

entonces:

$$-p^2 \bar{U}_s(p, t) + pU(0, t) = \frac{1}{K} \frac{d}{dt} \bar{U}_s(p, t) \quad \dots (4)$$

Empleando (2) queda;

$$\frac{d}{dt} \bar{U}_s(p, t) + Kp^2 \bar{U}_s(p, t) = KpU_0 \quad \dots (5)$$

por medio de la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$y' + f(x)y = r(x)$$

$$y(x) = e^{-h} \left[\int e^h r dx + c \right]; \quad h = \int f(x) dx$$

$$h = \int k\rho^2 dt = k\rho^2 t$$

$$U_s(\rho, t) = e^{-k\rho^2 t} \left[\int e^{k\rho^2 t} k\rho U_0 dt + c \right]$$

$$= e^{-k\rho^2 t} \left[\frac{U_0}{\rho} \int e^{k\rho^2 t} k\rho^2 t + c \right]$$

$$= e^{-k\rho^2 t} \left[\frac{U_0}{\rho} e^{k\rho^2 t} + c \right]$$

$$\bar{U}_s(\rho, t) = \frac{U_0}{\rho} + ce^{-k\rho^2 t} \quad \dots \quad (6)$$

para obtener B usamos (2); que aplicada a la transformación seno, obtenemos:

$$\bar{U}_s(\rho, 0) = \int U(x, 0) \text{Sen} \rho x dx = 0 \quad \dots \quad (7)$$

haciendo $t = 0$ en virtud de (6) y (7); obtenemos que:

$$A = - \frac{U_0}{\rho}$$

entonces:

$$\bar{U}_s(p, t) = \frac{U_0}{p} (1 - e^{-kp^2 t})$$

y utilizando la fórmula de inversión (antitransformada):

$$U_s(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{U}_s(p, t) \operatorname{Sen} px \, dp$$

obtenemos la solución:

$$U(x, t) = \frac{2U_0}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - e^{-kp^2 t}) \frac{\operatorname{Sen} px}{p} \, dp$$

y recordando que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sen} px}{p} \, dp = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$$

se transforma en:

$$U(x, t) = U_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kp^2 t} \frac{\operatorname{Sen} px}{p} \, dp \right)$$

Después desarrollando $\operatorname{Sen} px$, integrando término a término conduce a la forma

$$U(x, t) = U_0 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right)$$

$$U(x, t) = U_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{kt}}$$

IV.- Resolver la ecuación de onda no homogénea

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - K \operatorname{Sen} \pi x ; 0 < X < 1, \dots (1)$$

con condiciones iniciales y de frontera

$$U(x, 0) = 0 ; \left. \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) \right|_{t=0} = 0 \dots (2)$$

$$U(0, t) = 0 \quad U(1, t) = 0 \dots (3)$$

Aplicando la transformada de Laplace relativa a t y obtenemos que:

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{U}(x, \rho) = \frac{1}{c^2} [\rho \bar{U}(x, \rho) - \bar{U}(x, 0) - u'(0)] - \frac{K \operatorname{Sen} \pi x}{\rho} \dots (4)$$

Y empleando la condiciones de contorno obtenemos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{U}(x, \rho) - \frac{\rho^2}{c^2} \bar{U}(x, \rho) = - \frac{K \operatorname{Sen} \pi x}{\rho} \dots (5)$$

Solucionando éste problema por el método de variación de parámetros entonces:

$$\bar{U}(x, \rho) = A e^{\frac{(\rho/c)x}{c}} + B e^{-\frac{(\rho/c)x}{c}} + \frac{Kc}{\rho(\rho^2 + \pi^2 c^2)} \operatorname{Sen} \pi x \dots (6)$$

donde A y B son constantes.

Ahora si aplicamos las condiciones de contorno (3) en (6)

$$A + B = 0$$

$$A e^{\frac{\rho}{c}} + B e^{-\frac{\rho}{c}} = 0$$

entonces obtenemos que:

$$A = B = 0$$

y por lo tanto

$$\bar{U}(x, p) = \frac{K_0}{p(p^2 + \pi^2 c^2)} \operatorname{Sen} \pi x \quad \dots \quad (7)$$

$$\bar{U}(x, p) = \frac{K}{\pi^2 c} \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \pi^2 c^2} \right] \operatorname{Sen} \pi x$$

Empleando la antitransformada:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{U}(x, p) \} = \frac{K}{\pi^2 c} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + \pi^2 c^2} \right\} \right] \operatorname{Sen} \pi x$$

entonces:

$$U(x, t) = \frac{K}{\pi^2 c} (1 - \operatorname{Cos} \pi c t) \operatorname{Sen} \pi x$$

es solución de (1), sujeta a (2) y (3)

Hallar la distribución de la temperatura $T(x, t)$ es un sólido infinito si sabemos que $T(x, 0) = f(x)$.

El método que emplearemos de las transformadas de Fourier. Como no depende de y ó de z , entonces:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aplicando entonces la transformada de Fourier con la variable x :

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k, t) e^{ikx}$$

$$T(k, t) = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-ikx} dx$$

Así pues,

$$-K^2 F(k, t) = \frac{1}{K} \frac{\partial F(k, t)}{\partial t}$$

cuya solución es

$$F(k, t) = \phi(k) e^{-k^2 kt}$$

la condición inicial dá:

$$F(k, 0) = \int_0^{\infty} T(x, 0) e^{-ikx} dx$$

Donde:

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Y

$$F(k, t) = \int_0^{\infty} F(x) e^{-ikx} e^{-k^2 kt}$$

Encontrando la antitransformada de Fourier, tenemos que:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int_0^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} e^{-k^2 kt} \\ &= \int_0^{\infty} dx' f(x') \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} e^{-k^2 kt} \end{aligned}$$

La segunda integral (utilizando las tablas de integrales obtenemos) es:

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi kt}} e^{-(x-x')^2/4kt}$$

por lo tanto;

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} dx' f(x') \sqrt{\frac{1}{4\pi kt}} e^{-(x-x')^2/4kt}$$

la función $G(x, t; x') =$

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi kt}} e^{-(x-x')^2/4kt}$$

es la función de Green.

(I).- La ecuación de onda en coordenadas polares esféricas

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \dots\dots\dots (1)$$

Resolviendo éste ejemplo por el método de separación de variables; entonces intentemos una solución de la forma:

$$\psi (x,t) = X (x) T (t) \dots\dots\dots (2)$$

Sustituyendo ésta solución en la ecuación diferencial parcial (1) y dividiendo por XT se obtiene.

$$\frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

EL primer miembro es una función de x ; el segundo miembro es una función sólo de t . Hacemos entonces que sean iguales a constantes (de separación), de este modo, la ecuación se separa en 2, una dependiente del tiempo

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + w^2 t = 0 \dots\dots\dots (3)$$

donde $W = Kc$. La solución es

$$T = \begin{Bmatrix} \text{Sen } wt \\ \text{Cos } wt \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad T = e^{\pm iwt} \dots\dots\dots (4)$$

Volviendo a la segunda ecuación. Es la llamada ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 X + K^2 X = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

pasándolo a coordenadas esféricas tenemos que:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{Sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} X + K^2 X = 0$$

Sea $X = R(r)\Theta(\theta)\phi(\vartheta)$, sustituyendo en (6) y dividiendo toda por $R\Theta\phi$ tenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{Sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{d^2 \phi}{d\vartheta^2} K^2 = 0$$

Si hubiéramos multiplicado por $r^2 \text{Sen}^2 \theta$, el tercer término hubiera dependido sólo de ϑ , en tanto que el resto dependería sólo de r y θ . Entonces:

$$\frac{1}{\phi} \left(\frac{d^2 \phi}{d\vartheta^2} \right) \text{cte}^2 = -m^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\vartheta^2} + m^2 \phi = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\phi = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sen } m\theta \\ \text{Cos } m\theta \end{array} \right\} \quad \text{ó} \quad \phi = e^{\pm \ell m \theta} \dots\dots\dots(8)$$

La ecuación en r, θ se convierte, en:

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \theta \text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{Sen} \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} + K \stackrel{=}{=} 0$$

Si multiplicamos todo por r^2 , el primero y cuarto términos dependen sólo de r , mientras que el segundo y tercero dependen solo de θ .

$$\frac{1}{\text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{Sen} \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\text{Sen}^2 \theta} \theta = (\text{cte.}) \theta = -\ell(\ell+1)\theta \dots(9)$$

Y

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[K^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R = 0 \dots\dots\dots(10)$$

Si suponemos $\text{Cos} \theta = X$, la ecuación en θ (9) se convierte en:

$$(1-x^2) \frac{d^2 \theta}{dx^2} - 2x \frac{d\theta}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \theta = 0 \dots\dots(11)$$

ésta es la ecuación asociada de Legendre, sus soluciones son $\Theta = P^m(\alpha), Q^m(\alpha)$ (funciones asociadas de Legendre) ... (12)

La ecuación radial (10) mediante un cambio de variable dependiente

$R = U/\sqrt{r}$, se transforma en

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + [k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2}] U = 0 \dots\dots\dots(13)$$

que es la ecuación de Bessel con $\alpha = kr$ y $m = l + \frac{1}{2}$.

Por consiguiente

$$R = \frac{J_{l + \frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} - \frac{Y_{l + \frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}$$

Las funciones esféricas de Bessel se definen mediante

$$j_l(\alpha) = \sqrt{\pi / 2\alpha} J_{l + 1/2}(\alpha)$$

$$n_l(\alpha) = \sqrt{\pi / 2\alpha} Y_{l + 1/2}(\alpha)$$

y $h_l^{(1,2)}(\alpha) = j_l(\alpha) \pm i n_l(\alpha)$ (funciones esféricas de Hunkel)

Si $k=0$, de modo que $\partial U / \partial t = 0$; y en realidad discutimos la ecuación de Laplace, la ecuación radial (10) se convierte

$$\bar{R}'' + \frac{2}{r} \bar{R}' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \bar{R} = 0$$

que tienen las soluciones

$$R = \begin{cases} r^\ell \\ r \end{cases} - (\ell + 1)$$

- Influencia de la desintegración radiactiva en la temperatura de la corteza terrestre.

Para juzgar el estudio térmico interno de la Tierra, tenemos pocos datos, que se obtienen de observaciones en su superficie. Las nociones fundamentales sobre el campo térmico de la corteza terrestre son las siguientes. Las oscilaciones diarias y anuales de temperatura tienen lugar en una capa superficial relativamente fina (10-20m para las oscilaciones anuales). Más abajo de esta capa, la temperatura varía muy lentamente con el transcurso del tiempo.

Las observaciones en las minas y en los pozos que se refieren a los 2 ó 3 km. superiores de la corteza terrestre, muestran que la temperatura se eleva con la profundidad por término medio en 3°c por cada 100m.

Los primeros intentos para dar una explicación teórica del gradiente geotérmico observado, en el siglo pasado, encontraron muchas dificultades. Estas tentativas partían de la presentación del enfriamiento de la Tierra, calentada en el pasado.

La temperatura inicial, que caracteriza éste proceso de enfriamiento, debe ser del orden de $T_0 = 1200^\circ\text{C}$ (Temperatura de fusión de las rocas montañosas); la temperatura superficial tiene orden 0°C y no pudo desviarse mucho (en más de 100°) de ésta magnitud durante todo el período de existencia de la vida en la Tierra.

La teoría cuantitativa más sencilla del enfriamiento de la Tierra nos conduce a la resolución de la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

en el semiespacio $0 < z < \infty$ con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$U(z, 0) = T_0$$

$$U(0, t) = 0$$

La solución de éste problema está dado por la integral de Poisson para la conducción del calor y ésta es

$$U(z, t) = T_0 \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{ast}}} \frac{z}{\sqrt{ast}} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

el gradiente de ésta función, para $z = 0$, es igual a,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-z/4a^2 t} \Big|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{a^2 t}}$$

Sustituyendo los valores conocidos del gradiente geotérmico,

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} = \gamma = 3 \times 10^{-4} \text{ grad/cm ; } T_0 = 1200^\circ \text{C ; } a^2 = 0.006 \text{ cm}^2/\text{seg, que}$$

corresponde al coeficiente medio de conductividad de temperatura de los granitos y los basaltos que se determina empíricamente, se obtiene el valor $t = 0.85 \times 10^{15}$ sea = 27,000,000 años para la duración del proceso de enfriamiento. Tal idea de la edad de la tierra no concordaba en ninguna forma con los datos geológicos. El carácter aproximadamente de la teoría estudiada (el desprecio de la curvatura de la Tierra, la inconstancia del coeficiente de conductividad térmica, la inexactitud del valor T_0) no puede, claro esta, cambiar el orden del valor hallado para la edad de la Tierra, la cual, según los últimos datos, se aprecia aproximadamente en 2×10^9 años.

El esquema físico del régimen térmico de la Tierra sufrió una revisión sustancial luego del descubrimiento del fenómeno de la desintegración radiactiva.

Los elementos radiactivos, desperdigados en la corteza terrestre, al desintegrarse causan su calentamiento, de forma que la ecuación de la conducción del calor debe tener la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad ; \quad (f = \frac{A}{c\rho} \quad ;$$

donde A es la densidad volumétrica de las fuentes térmicas. Tras numerosas experimentos de la radiactividad de las rocas montañosas y su generación de calor, se ha adoptado el valor de

$$A = 1.30 \times 10^{-12} \text{ cal/cm}^3\text{-seg}$$

Este valor tiene en cuenta el calor que desprende el uranio, el torio y el potasio, conjuntamente con los productos de su desintegración.

Supongamos que la densidad de las fuentes radiactivas dentro del globo terrestre es constante e igual al valor A , determinado para las capas superiores de la corteza terrestre. En éste caso, la cantidad de calor que se desprende en todo el globo terrestre durante la unidad de tiempo, será igual a

$$G = \frac{4}{3} \pi R^3 A$$

Si hacemos una segunda suposición de que la Tierra no se calienta por el calor radiactivo. En este caso, el flujo de calor a través de la unidad de superficie es:

$$q = k \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{G}{4\pi R^2}$$

donde k y $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$ son los coeficientes de conductividad térmica y el gradiente geotérmico en la superficie de la Tierra.

De aquí se halla para $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$, cuando $z = 0$, el valor

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \geq \frac{4\pi R}{3k} \cong 0.3 \times 10^{-2} \text{ grad/cm},$$

donde $R = 0.3 \times 10^3 \text{ km}$ es el radio de la Tierra, y $k = 0.004$, el valor medio del coeficiente de conductividad térmica de las rocas sedimentarias.

De éste modo, el gradiente geotérmico, calculado bajo la hipótesis de que la distribución de los elementos radiactivos es constante, y que la Tierra no se calienta por la desintegración radiactiva, supera en 2 ordenes al valor observado del coeficiente geotérmico

$$\gamma = 3 \times 10^{-4} \text{ grad/cm}$$

Si eliminamos la hipótesis de la constancia de la distribución de los elementos radiactivos y supongamos que éstos están distribuidos en una capa de potencia R en la superficie de la Tierra. Despreciando la curvatura de la Tierra, se obtiene, para determinar la temperatura estacionaria, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{K} & \text{para } 0 \leq z \leq H \\ 0 & \text{para } z > H \end{cases}$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución del problema planteado es igual a

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{K} \left(Hz - \frac{z^2}{2} \right) ; & 0 \leq z \leq H \\ \frac{A}{K} \frac{H^2}{2} ; & z \geq H \end{cases}$$

Dado que ésta función es continua conjuntamente con su derivada primera para $z = H$ y satisface las condiciones del problema.

Determinado el valor del gradiente de ésta función para $z = 0$, igual a

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{AH}{K} ,$$

y compáralo con el valor observado

$$\gamma = 3 \times 10^{-4} \text{ grad/cm}$$

se halla que

$$R = \frac{rk}{A} \cong 10^6 \text{ cm} = 10 \text{ km.}$$

Apreciamos la influencia de la hipótesis hecha de que la temperatura es estacionaria sobre la magnitud del gradiente geotérmico.

Para esto, analizamos la solución de la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f$$

$$F = \begin{cases} \frac{A}{cp} & , & 0 \leq x \leq R \\ 0 & , & x > R \end{cases}$$

con las condiciones iniciales y de frontera nulas:

$$w(x, 0) = 0$$

$$w(0, t) = 0$$

La solución de la ecuación no homogénea y condiciones iniciales nulas puede ser representada, mediante la integral

$$w(x, t) = \int_0^\infty \int_0^t \Theta(x, \xi, t-\tau) f(\xi) d\xi d\tau$$

donde G es la función de la fuente para la semirrecta, igual a

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\}$$

calculemos el valor del gradiente para $x = 0$, tomando en cuenta el valor de la función f :

$$\begin{aligned} \frac{2w}{2x} \Big|_{z=0} &= \frac{A}{c\rho^2 \sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\xi}{\sqrt{[a^2(t-\tau)]^3}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \int_0^H \frac{H^2}{4a^2(t-\tau)} e^{-\alpha} d\alpha d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2 \theta}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2 \theta}} \right] d\theta ; \end{aligned}$$

donde $\theta = t-\tau$

de esta manera,

$$\frac{2w}{2x} \Big| = \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\sqrt{t}}{a} - \frac{H}{a^2} \int e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right\} ;$$

donde:

$$\sigma = \frac{H}{2\sqrt{a^2 \theta}} ; \quad \sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}} ; \quad \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{\frac{1}{2}}{H} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \theta}}$$

Calculamos la integral

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma} \Big|_{\sigma_0}^{\infty} - \sigma \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0} - \int_{\sigma_0}^{\infty} 2e^{-\sigma^2} d\sigma$$

de donde

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{\rho \rho a^2} \left\{ \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\frac{K^2}{4a^2 t}} \right] + H \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \frac{\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma}{2\sqrt{a^2 t}} \right\} \quad (1)$$

Se vé que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{K} H$$

puesto que $\rho \rho a^2 = K$, el límite del primer sumando entre llaves es igual a cero, y el del segundo, igual a H .

Calculamos la desviación de $\frac{\partial w}{\partial z}$ de su valor límite para $t = \sigma \times 10^{16}$ seg

el valor de σ es pequeño:

$$\sigma = \frac{K}{2\sqrt{a^2 t}} = \frac{10^6}{2\sqrt{6 \times 10^{-9} \cdot 6 \times 10^{16}}} = \frac{1}{2.19} \cong 0.025$$

Desarrollando las funciones de (1) en series, obtengamos que,

$$\frac{A}{K} R - \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{K} R \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_0}} [\sigma_0^2 + \dots] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma_0 \right\} \cong \frac{A}{K} R \cdot (0.04)$$

es decir $\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0}$ se diferencia de su valor límite en 4%

Los razonamientos son de carácter apreciativo. Sin embargo, tomando en cuenta la gran estabilidad de la velocidad de la designación radiactiva, que no varía bajo la acción de las temperaturas y presiones que nos son accedibles, debemos llegar a la conclusión de que la concentración de los elementos radiactivos debe disminuir rápidamente con la profundidad, si nos basamos en el valor A para las capas superiores de la corteza terrestre, establecido mediante numerosas mediciones. Hasta hoy no existe ninguna explicación física que permita establecer la ley de la disminución de la concentración de los elementos radiactivos con la profundidad.

VII.- CONCLUSIONES

En este trabajo, se notó que la resolución de ecuaciones diferenciales parciales presenta problemas mucho más difíciles que la resolución de las conocidas ecuaciones diferenciales ordinarias y salvo para ciertos tipos especiales de ecuaciones en derivadas parciales lineales no hay métodos generales de resolución efectivos. En este trabajo se concentró en la resolución de tipos particulares de ecuaciones lineales. Esto no constituyó realmente una restricción demasiado seria puesto que las ecuaciones en derivadas parciales lineales tienen una gran variedad en aplicaciones importantes en muchas ramas de la Física, la Química y la Ingeniería.

Esto no quiere decir que no aparezcan sin embargo, otro tipo de ecuaciones. Por ejemplo las ecuaciones de la relatividad general que describen el campo gravitacional son ecuaciones de segundo orden que no son lineales.

VIII.- APENDICE

A) Ecuaciones diferenciales de las funciones especiales.

Se ha visto que el método de separación de variables transforma el problema de resolver una ecuación diferencial parcial en el de resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales totales. Por su frecuente aparición en el tratamiento de muy diversos problemas, algunas ecuaciones diferenciales han sido estudiadas con gran detalle. Se han obtenido soluciones generales, particulares que cumplen ciertas condiciones en la frontera, etc. Las soluciones de éstas ecuaciones diferenciales reciben el nombre de funciones especiales; cada una de éstas funciones lleva en particular el nombre del autor que la estudió primero.

Las funciones especiales tienen su origen no sólo en el estudio de diferentes ecuaciones diferentes parciales, sino también en el estudio de una misma ecuación de distintos sistemas de coordenadas o bien con diferentes condiciones en la frontera.

Ejemplo:

Trataremos de resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Consideramos las coordenadas cilíndricas; las cuales están dadas por las ecuaciones de transformación

$$X = r \cos \varphi, \quad Y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z \dots\dots(1)$$

La ecuación toma la forma

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0 \dots\dots(2)$$

Supongamos ahora que existe una solución de la forma

$$s(r, \varphi, z) = R(r) \phi(\varphi) Z(z) \dots\dots(3)$$

Sustituyendo e introduciendo 2 constantes de separación m^2 y n^2 .

Se obtienen las ecuaciones

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - m^2 Z = 0 \dots\dots(4)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + n^2 \phi = 0 \dots\dots(5)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R \dots\dots(6)$$

Las ecuaciones (4) y (5), sus soluciones son exponenciales de argumento real o imaginario, según el signo de la constante de separación.

La ecuación (6) es de la forma

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d F(z)}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) F(z) = 0 \dots\dots\dots(7)$$

que es la llamada ecuación de Bessel.

Por sus numerosas aplicaciones las soluciones más importantes de esta ecuación son las siguientes:

- a) Las funciones de Bessel $J_n(z)$, que son soluciones regulares en el origen.
- b) Las funciones de Neumann $N_n(z)$, que tienen una singularidad en el origen.
- c) Las funciones de Hankel de primera $H_n^{(1)}(z)$ y de segunda $H_n^{(2)}(z)$ clase las cuales son ciertas combinaciones lineales de $J_n(z)$ y $N_n(z)$.

Hagamos ahora la separación en coordenadas esféricas, definidas por las ecuaciones

$$x=r \cos \theta \cos \varphi, \quad y=r \cos \theta \sin \varphi, \quad z=r \sin \theta \dots\dots\dots(8)$$

Procediendo igual como en el caso anterior tenemos que, si $m=0$, se obtiene para la variable θ una ecuación del tipo

$$(\rho^2 - 1) \frac{d^2 L(\rho)}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dL(\rho)}{d\rho} - \rho(\rho+1) L(\rho) = 0 \dots\dots(9)$$

que es la llamada ecuación de Legendre.

La ecuación de Legendre es un caso con el problema de resolver en coordenadas esféricas la ecuación diferencial parcial de Helmholtz.

$$\nabla^2 Q + K^2 Q = 0 \dots\dots\dots(11)$$

que es una de las más importantes y que aparece en problemas de propagación de ondas y de difusión de calor.

APENDICE I

B) Soluciones Particulares.

EL método de solución en series permite obtener la solución general, o por lo menos una solución particular de las ecuaciones diferenciales de las funciones especiales, con lo cual el problema matemático de resolver la ecuación queda resuelto. Pero cuando la ecuación diferencial aparece en conexión con algún problema físico, resulta que la naturaleza del problema impone restricciones adicionales, ya sea sobre los coeficientes de la ecuación diferencial, o en forma de las condiciones en la frontera que deben satisfacer las soluciones. Por ejemplo el problema puede ser de tal naturaleza que la solución en serie se reduzca a un polinomio, o bien puede ocurrir que la única solución regular dentro de todo el dominio de la variable independiente sea un polinomio, y algunos otros casos.

Algunas de las soluciones particulares obtenidas usando condiciones de los tipos antes señalados aparecen en un número muy variado y grande de problemas y por esta razón se les conoce como funciones especiales de la física. Ahora veremos algunas propiedades de las funciones especiales.

AD Polinomios de Legendre

Para n cero o entero positivo, la única solución de la ecuación de Legendre que es regular en los puntos $x = \pm 1$ es un polinomio. Ahora bien, en casi todos los problemas físicos en los que aparece ésta ecuación, la variable independiente es el coseno de una variable angular y su dominio de definición es en consecuencia $-1 \leq x = \cos \theta \leq +1$, de modo que la única solución regular en todo el dominio de la variable es un polinomio. Este polinomio, normalizado a la unidad cuando $x = \pm 1$, se conoce con el nombre de polinomio de Legendre de grado n y está definido por:

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3)(n-2)}{n!} x^n$$

$$\left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right\} \dots (1)$$

Algunas consecuencias inmediatas de ésta definición son las siguientes:

$$P_n(1) = 1 \qquad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \qquad \dots \dots \dots (2)$$

$$P_{2n+1}(0) = 0 \qquad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n)} \qquad \dots \dots (3)$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad \dots \dots \dots (4)$$

B) Polinomios asociados de Legendre

La ecuación diferencial de los polinomios de Legendre es:

$$(1-x^2) y'' - 2xy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] y = 0 \dots\dots\dots (5)$$

y puede resolverse por el método de solución en serie, pero es más conveniente reducir la ecuación a una de Legendre proponiendo una solución del tipo

$$y = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \dots\dots\dots (6)$$

con lo cual se encuentra que z debe satisfacer la ecuación de Legendre.

para m y n cero o enteros positivos con n ≥ m, sólo hay una solución de (5) que no tiene singularidad logarítmica en x=±1.

Esta solución se llama polinomio asociado de Legendre de grado n - m, orden m y está definido por:

$$P_n^m = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} (1-x^2)^{m/2} \left[x - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \frac{(n-m)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} \dots\dots\dots \right] \dots\dots\dots (7)$$

Entonces vemos que

$$P_n^0(x) = P_n(x) \quad P_n^m(-x) = (-1)^{n-m} P_n^m(x) \dots\dots(8)$$

C) Polinomios de Laguerre

La solución en serie obtenida para la ecuación de Laguerre es convergente para toda x , pero cuando $\alpha = n$ es un entero positivo o nulo, la serie se reduce a un polinomio de Laguerre de grado n y está definida por:

$$L_n(x) = (-1)^n \left[x^n - \frac{1}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \dots + (-1)^n n! \right] \dots\dots(9)$$

Los polinomios de Laguerre de grado más bajo son:

$$L_0(x) = 1 \quad L_1(x) = 1-x \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2 \dots\dots(10)$$

D) Polinomios asociados de Laguerre

Los polinomios asociados de Laguerre de grado $n-s$ y orden s se definen por:

$$L_n^s(x) = \frac{d^s}{dx^s} L_n(x) \dots\dots(11)$$

y son soluciones de ecuación diferencial

$$xy'' = (1+s-x) y' - (n-s) y = 0 \dots\dots(12)$$

para n y s enteros positivos y cero.

E) Polinomios de Hermite

Cuando el parámetro α de la ecuación de Hermite es un entero positivo n , la solución en serie se reduce a un polinomio que se llama polinomio de Hermite de grado n y su ecuación y solución están dadas por:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (n \text{ entero})$$

y su solución es:

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-5)}{\left[\frac{n-5}{2}\right]!} (2x)^0 + \dots (13)$$

Los primeros polinomios de Hermite son:

$$H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \dots (14)$$

F) Polinomios de Tschebyscheff

Cuando n es entero, la solución en serie de la ecuación de Tschebyscheff se reduce a un polinomio y es la única solución convergente para $x = 1$. La primera forma general de éstos polinomios es:

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left[x - \frac{n}{1! \cdot 2^2} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2! \cdot 2^4} x^{n-4} - \dots \right] \dots (15)$$

y se tiene $T_0 = 1/2$, $T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1$

G) *Funciones de Bessel*

Solo una de las soluciones para la ecuación de Bessel permanece finita para $x = 0$. Cuando a la constante arbitraria se le dá el valor particular

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pi/2}}$$

la serie resultante se conoce con el nombre de función de Bessel de primera clase y se denota por:

$$J_{\pi}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\pi+2s}}{s!(\pi+s)!} \dots\dots\dots(16)$$

definida solo para π entero positivo a cero. Las dos funciones que aparecen con mayor frecuencia son las de orden cero y uno:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} + \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots (17)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \frac{x^7}{2^7 3! 4!} + \dots (18)$$

En general, si ρ es no entero y positivo, la función de Bessel se define por:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-p+2k}}{2^{p+2k} k! \Gamma(-p+k+1)}, \dots (19)$$

La cual se reduce a (16) cuando p es entero.

Para p positiva y no entera, una segunda solución de la ecuación de Bessel es:

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-p+2k}}{2^{-p+2k} k! \Gamma(-p+k+1)} \dots (20)$$

o bien

$$Y_p(x) = N_p(x) = \frac{1}{\sin \pi p} [J_p(x) \cos(\pi p) - J_{-p}(x)] \dots (21)$$

La cual se conoce como función de Bessel de segunda clase.

En términos de las funciones de Bessel se definen otras dos funciones que tienen también mucha importancia por sus aplicaciones, éstas son las llamadas funciones de Hankel de primera y segunda clase:

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x) \dots (22)$$

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x) \dots (23)$$

Apendice - Operadores Lineales -

Hablaremos un poco de espacios lineales. El empleo de los vectores tridimensionales para representar magnitudes físicas tales como posición, velocidad, fuerzas, etc.. es completamente conocido.

Por abstracción de las bien conocidas propiedades de tales vectores se llega a la siguiente definición de espacio lineal.

Un espacio vectorial o lineal es un conjunto de objetos (vectores) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , que es cerrado respecto de dos operaciones:

1.- *Adición*, que es conmutativa y asociativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

2.- *Multiplicación por un escalar* (cualquier número complejo), que es distributiva y asociativa, esto es,

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

Suponemos, además que existe un vector nulo $\vec{0}$ tal que para todo \vec{a}

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

que la multiplicación por el escalar 1 deja invariable cualquier vector

$$1 \vec{a} = \vec{a}$$

y por último, que para todo \vec{a} , existe un vector $-\vec{a}$ tal que

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$

Un conjunto de vectores $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{u}$ se llama linealmente independiente si la ecuación

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \dots + \sigma \vec{u} = 0$$

solo es válida en el caso en que $\lambda = \mu \dots = \sigma = 0$

Si en determinado espacio lineal existen n vectores linealmente independiente, pero no lo son $n+1$ vectores cualesquiera, se dice que el espacio lineal en cuestión es de dimensión n . Consideramos principalmente espacios lineales de dimensión finita. Sea $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ un conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio lineal de dimensión n . Si \vec{x} es un vector cualquiera de ese espacio, existe una relación:

$$\lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 + \dots + \sigma \vec{e}_n + \tau \vec{x} = \vec{\delta}$$

con las constantes no todas nulas, y en particular $\tau=0$. Así pues, \vec{x} puede expresarse como una combinación lineal de los \vec{e}_i :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \pi_i \vec{e}_i$$

Los vectores \vec{e}_i forman lo que se llama una base, o sistema de coordenadas y los números π_i son las componentes de \vec{x} en ese sistema. Los \vec{e}_i son los vectores base. El hecho de que un vector cualquiera \vec{x} pueda escribirse como una combinación lineal de los \vec{e}_i se expresa a menudo diciendo que el conjunto de los vectores base \vec{e}_i es completo.

Consideremos ahora una función vectorial de un vector esto es, una regla que asocia a todo vector \vec{x} un vector $\phi(\vec{x})$, en forma lineal,

$$\phi(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \phi(\vec{a}) + \mu \phi(\vec{b})$$

Basta conocer los n vectores $\phi(\vec{e}_i)$, que pueden expresarse convenientemente en función de la base \vec{e}_i , esto es,

$$\phi(\vec{e}_i) = \sum_j A_{ji} \vec{e}_j \dots \dots \dots (1)$$

en donde A_{ji} es la componente j -ésima del vector $\phi(\vec{e}_i)$.

Si consideramos ahora un vector cualquiera \vec{x} , y ponemos

$\phi(\vec{x}) = \vec{y}$, tenemos

$$\vec{y} = \left(\sum_i A_{ji} \vec{e}_i \right) \dots \dots \dots (1)$$

en donde A_{ji} es la componente j -ésima del vector $\phi(\vec{e}_i)$.

Si consideramos ahora un vector cualquiera \vec{x} , y podemos

$\phi(\vec{x}) = \vec{y}$, tenemos

$$\vec{y} = \phi \left(\sum_i x_i \vec{e}_i \right) = \sum_i x_i \sum_j A_{ji} \vec{e}_j$$

Con lo que los componentes de \vec{x} e \vec{y} se relacionan así:

$$y_j = \sum_i A_{ji} x_i$$

También podemos expresar las relaciones anteriores en otra forma; diciendo que la asociación de \vec{y} con \vec{x} se consigue mediante un operador lineal A aplicado a \vec{x} . Simbólicamente,

$$\vec{y} = A \vec{x}$$

Entonces los números A_{ji} son las componentes del operador lineal A (o de la función vectorial ϕ) en el sistema coordenado \vec{e}_i . De (1) resulta que A_{ji} es la componente i -ésima del vector $A \vec{e}_j$.

Lo mismo que ocurre con los vectores, con un operador lineal tiene con frecuencia una significación física independiente de un determinado sistema coordenado, y pueden estudiarse con independencia de un sistema particular.

BIBLIOGRAFIA

Stephenson, G.,
Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales.
Editorial Reverté, S.A. 1982.

A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros
La Matemática: Su Contenido, Métodos y Significado, tomo 2,
Alianza Editorial, 1974.

B.M. Budak, A.D. Samarski, A.N. Tijonov.
Problemas de la Física Matemática, volumen 1,
Mc.Graw Hill, 1973

Prieto F.E., Lozano J.M., Bauer M.,
Métodos Matemáticos de la Física Funciones Especiales,
Manuales Universitarios UNAM, 1969.

Tronter, C.J.,
Transformadas Integrales en la Física-Matemática,
Noriega-Uteha, 1964.

Tijonov A., Samarsky A.
Ecuaciones de la Física-Matemática,
Editorial Mir, Moscú, 1980.

Mathews Jon, Walker R.L.
Matemáticas para Físicos,
Editorial Reverté, 1979.

Hildebrand Francis B.
Advanced Calculus for Applications, Second edition,
Prentice-Hall, New Jersey 1976.

Wylie C.R., J.R.,
Matemáticas Superiores para Ingeniería, Tercera Edición,
Editorial Mc. Graw-Hill, 1969.

Gudonov S.K.,
Ecuaciones de la Física-Matemática,
Mir, Moscú, 1971.

Kreyszig, Erwin.,
Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Tomo II,
Editorial Limusa, México, 1974.

