UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

FUNCIONES DE GREEN
Y SUS APLICACIONES

TEMA DE SUSTENTACION

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN FISICA

PRESENTA

Martin Ricardo Barron Felix

MONTERREY, N. L. DICIEMBRE DE 1992

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

FUNCIONES DE GREEN

Y SUS APLICACIONES

TEMA DE SUSTENTACION

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN FISICA

PRESENTA

Martin Ricardo Barron Felix

MONTERREY, N. L. DICIEMBRE DE 1992

Dedicado a dos grupos de personas:

Aquellas para las que soy importante

Y

Aquellas que han influído positivamente

Para que yo sea como soy.

FUNCIONES DE GREEN Y SUS APLICACIONES

PROLOGO

La intención del presente escrito es solamente mostrar la utilización de las Funciones de Green en la solución de problemas de valores en la frontera en los que aparecen ecuaciones diferenciales no homogéneas o bien ecuaciones diferenciales homogéneas pero con condiciones frontera o condiciones iniciales no homogéneas.

En sus primeras siete partes se trata un poco acerca de la presentación y propiedades de las Funciones de Green, así como también de algunos de los métodos que existen para obtener la Función de Green de un problema de valores en la frontera determinado.

La parte principal del presente escrito lo constituye la dedicada a las aplicaciones de las Funciones de Green para la solución de problemas. En tal parte, la número VIII, se presentan doce ejemplos, en forma de problemas con su respectiva solución.

En tales problemas se aplican las principales ideas mencionadas en las partes anteriores , lo que sirve como una ampliación de las ideas tratadas en tales partes.

En algunos de los ejemplos presentados, el desarrollo matemático correspondiente se muestra con mucho detalle, mientras que en otros, solamente se menciona la forma en la que se llega a determinada expresión o resultado, sin mostrarla.

Y ya que sobran palabras y falta tiempo para expresarlas, solamente diré que espero que el presente escrito muestre aunque sea en parte, la grata impresión que dejó en mí el hecho de saber de la existencia, propiedades y sobre todo aplicaciones de las Funciones de Green.

MARTIN RICARDO BARRON FELIX

INDICE

PAGINA

INTRODUCCION

Una gran cantidad de las leyes generales que gobiernan los fenómenos de la Naturaleza son fácilmente expresables utilizando el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la simple caída de un cuerpo la podemos representar aproximadamente mediante la ecuación diferencial :

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} - mg + k\frac{dy(t)}{dt} = 0$$

donde "m" es la masa del cuerpo, "y(t)" es la distancia recorrida por el cuerpo a partir del punto donde inició su movimiento, "g" es la aceleración debida a la atracción gravitacional, "k" es una constante de proporcionalidad para la velocidad y "t" es el tiempo que el cuerpo lleva moviéndose.

Esta ecuación diferencial es de las llamadas ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, esto último por contener solamente una variable independiente (en este caso el tiempo "t").

Otro ejemplo del uso de las ecuaciones diferenciales en la descripción de un fenómeno físico lo tenemos en la llamada ecuación unidimensional de onda :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

la cual nos representa las vibraciones transversales de una cuerda homogénea, estirada mediante una tensión "T"; siendo "u(x,t)" el desplazamiento transversal de la cuerda en el punto "x" al tiempo "t"; la cantidad "c^2" equivale a "T/ρ", donde "ρ" es la densidad lineal de masa de la cuerda.

La anterior ecuación diferencial es de las llamadas ecuaciones diferenciales lineales parciales, pues contiene más de una variable independiente (en este caso "x" y "t").

Así como en los dos ejemplos anteriores, una amplia variedad de problemas físicos está relacionada con ecuaciones diferenciales lineales, tanto ordinarias como parciales y en particular, con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Tanto las ecuaciones diferenciales ordinarias como las parciales, se pueden dividir también en ecuaciones diferenciales homogéneas y ecuaciones diferenciales no homogéneas, siendo la forma general de una ecuación diferencial lineal, ordinaria, no homogénea, la siguiente:

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)y = D(x)$$

Esta ecuación se convierte en homogénea en el caso en que la cantidad "D(x)" sea nula.

Tanto para las ecuaciones diferenciales homogéneas como para las no homogéneas, se han desarrollado diversos métodos de solución, entre los cuales se encuentran, para el caso de las ecuaciones no homogéneas, los siguientes: el método de coeficientes indeterminados, el método de variación de parámetros, el método de la Transformada de Laplace, el método de la Función de Green , etc.

Precisamente, el presente escrito se refiere a las Funciones de Green, sus propiedades y, principalmente, sus aplicaciones en la solución de problemas no homogéneos, teniendo en cuenta que un problema puede ser no homogéneo tanto por su ecuación diferencial como por sus condiciones frontera. Este último punto significa que un problema no homogéneo puede estar formado por una ecuación diferencial no homogénea y condiciones frontera homogéneas o bien, por una ecuación diferencial homogénea y condiciones frontera no homogéneas. Para cada uno de estos casos se puede tratar de resolver el problema mediante la construcción de una apropiada Función de Green.

PRESENTACION Y PROPIEDADES

Las Funciones de Green reciben tal nombre en honor a su descubridor, el inglés George Green (1793 - 1841), quien las dió a conocer en el año de 1828 en su obra "Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism". Sin embargo tal trabajo fué desdeñado y casi completamente ignorado hasta su reimpresión en el año de 1846.

Para empezar, consideremos el problema de resolver la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$\hat{L}\{u(x)\} - \lambda\{u(x)\} = f(x)$$

definida en un cierto dominio D, siendo $\hat{L}$ un operador diferencial Hermitiano , λ una constante y con la función $u(x)$ sujeta a condiciones frontera homogéneas*.

Para resolver la ecuación diferencial, representaremos tanto a $u(x)$ como a $f(x)$ mediante series de las eigenfunciones $\varphi_n(x)$ del operador $\hat{L}$, de la siguiente manera:

$$u(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) \qquad , \qquad f(x) = \sum_n d_n \varphi_n(x) .$$

Sustituyendo estas expresiones en nuestra ecuación diferencial, tenemos:

$$\hat{L}\{ \sum_n c_n \varphi_n(x) \} - \lambda\{ \sum_n c_n \varphi_n(x) \} = \sum_n d_n \varphi_n(x)$$

pero : $\hat{L}\{ \varphi_n(x) \} = \lambda_n \varphi_n(x)$, donde λ_n es un eigenvalor del operador $\hat{L}$.Entonces:

$$\sum_n c_n \hat{L}\{ \varphi_n(x) \} - \sum_n c_n \lambda \varphi_n(x) \} = \sum_n d_n \varphi_n(x)$$

Continuando con las operaciones tenemos:

$$\sum_n c_n \lambda_n \varphi_n(\mathbf{x}) - \sum_n c_n \lambda \varphi_n(\mathbf{x}) \} = \sum_n d_n \varphi_n(\mathbf{x})$$

$$\sum_n c_n (\lambda_n - \lambda) \varphi_n(\mathbf{x}) = \sum_n d_n \varphi_n(\mathbf{x})$$

$$\sum_n \{c_n (\lambda_n - \lambda) - d_n\} \varphi_n(\mathbf{x}) = 0$$

Ahora, considerando que las eigenfunciones $\varphi_n(\mathbf{x})$ son linealmente independientes, podemos decir que :

$$c_n (\lambda_n - \lambda) - d_n = 0$$

por lo que c_n está dado por:

$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda}$$

Por otra parte, consideremos la expresión :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n d_n \varphi_n(\mathbf{x})$$

Multiplicando ambos lados de esta expresión por $\varphi^*_{n'}(\mathbf{x})$ e integrando la expresión resultante sobre todo el dominio D, tenemos:

$$\int_D \varphi^*_{n'}(\mathbf{x'})\mathbf{f}(\mathbf{x'})d\tau' = \int_D \sum_n \varphi^*_{n'}(\mathbf{x'})d_n \varphi_n(\mathbf{x'})d\tau'$$

y obtenemos:

$$\int_D \varphi^*_{n'}(\mathbf{x'})\mathbf{f}(\mathbf{x'})d\tau' = d_{n'}$$

donde hemos hecho uso de la propiedad que tienen las eigenfunciones del operador diferencial $\hat{\mathbf{L}}$ de ser un conjunto completo de funciones ortonormales. Por lo tanto podemos decir que d_n está dado por :

$$d_n = \int_D \varphi_n^*(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')d\tau'.$$

Sustituyendo este último resultado en la expresión obtenida para c_n, tenemos :

$$c_n = \frac{\int_D \varphi_n^*(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')d\tau'}{\lambda_n - \lambda}$$

Por lo que la solución para nuestra ecuación diferencial no homogénea nos queda:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_n \left\{ \frac{\int_D \varphi_n^*(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')d\tau'}{\lambda_n - \lambda} \right\} \varphi_n(\mathbf{x})$$

intercambiando el orden de integración y suma:

$$u(\mathbf{x}) = \int_D \left\{ \sum_n \frac{\varphi_n^*(\mathbf{x}')\varphi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda} \right\} f(\mathbf{x})d\tau'$$

Lo que también podemos expresar como :

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')d\tau'$$

Donde a :

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \sum_n \frac{\varphi_n^*(\mathbf{x}')\varphi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda}$$

se le llama "FUNCION DE GREEN" del operador diferencial $\hat{\mathbf{L}}$.

Nótese que $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ está determinada por el operador diferencial (frecuentemente Hermitiano), un cierto dominio D y condiciones frontera apropiadas.

Ahora, en la expresión encontrada para $u(\mathbf{x})$ hagamos $f(\mathbf{x})$ igual a $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, de donde obtenemos:

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)d\tau = G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$$

Por lo que podemos afirmar que $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ es la solución de la ecuación

$$\hat{L}G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - \lambda G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

sujeta a las condiciones frontera apropiadas.

La Función de Green tiene entonces un significado físico muy simple : Es la solución para el problema planteado para el caso de una "FUENTE PUNTUAL UNITARIA" $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

Debemos mencionar que si en la fórmula obtenida para $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ ocurre que $\lambda_n = \lambda$, la Función de Green se indefine, y la solución de nuestro problema, la función $u(\mathbf{x})$, por lo regular, no existe. Hay que decir también que la expresión :

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \sum_n \frac{\varphi_n^*(\mathbf{x}')\varphi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda}$$

se conoce con el nombre de FORMULA BILINEAL de la Función de Green.

Veamos ahora algunas de las propiedades que posee la Función de Green:

a).- La propiedad de UNICIDAD, que simplemente nos dice que para un operador diferencial dado, un dominio determinado y condiciones frontera especificadas, si la Función de Green existe, entonces es única.

b).- La propiedad de SIMETRIA. Para analizar esta propiedad, consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\nabla\cdot\left[\ p(\mathbf{r})\nabla y(\mathbf{r})\right] + q(\mathbf{r})y(\mathbf{r}) = -\ f(\mathbf{r}) \qquad (1)$$

la cual podemos considerar como una versión tridimensional de la ecuación de Sturm-Liouville. Ahora, si $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ es la Función de Green que corresponde a este caso, debe cumplir la anterior ecuación para el caso de una fuente puntual, o sea :

$$\nabla\cdot\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\right] + q(\mathbf{r})G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) = -\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \qquad (2)$$

que corresponde al caso en que tenemos una fuente puntual unitaria en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$.

Por otra parte, sea $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)$ una Función de Green que también cumple con las condiciones del problema planteado, pero con la diferencia de que ahora tenemos colocada la fuente puntual unitaria en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$; $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)$ cumple entonces con la ecuación :

$$\nabla\cdot\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\right] + q(\mathbf{r})G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2) = -\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \qquad (3)$$

Multipliquemos ahora la ecuación (2) por $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)$ y la ecuación (3) por $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$, realizando luego la resta entre estas dos ecuaciones obtenemos :

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\nabla\cdot\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\right] - G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\nabla\cdot\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\right]$$

$$= -G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)$$

Si ahora integramos ambos lados de la anterior expresión sobre un volumen V que contenga tanto a $\mathbf{r}_1$ como a $\mathbf{r}_2$, tenemos:

$$\int\left\{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\nabla\cdot\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\right] - G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\nabla\cdot\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\right]\right\}d\tau$$

$$= -\int\left\{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\right\}d\tau + \int\left\{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\right\}d\tau$$

$$= -\ G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1)$$

Pero la integral de volumen del lado izquierdo del signo de igualdad la podemos transformar en una integral de superficie si utilizamos la llamada "Segunda fórmula de Green" :

$$\int_{VOL} (\ \varphi\nabla\cdot\nabla\chi - \chi\nabla\cdot\nabla\varphi\ )\ dV = \oint_{SUP} (\ \varphi\nabla\chi - \chi\nabla\varphi\ )\cdot d\mathbf{S}$$

por lo que obtenemos:

$$\oint\left\{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\right] - G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)\left[\ p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)\right]\right\}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\ G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1)$$

pero, por la propiedad de unicidad, tenemos que las funciones tanto $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2)$ y $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ como sus respectivos gradientes deben coincidir sobre la superficie de integración S , de forma que la integral de superficie de la expresión anterior se anula (lo que también ocurre si tenemos la condición frontera de que la Función de Green se anule sobre S), obteniendo de esta manera que:

$$G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1)$$

lo que significa que la Función de Green es simétrica bajo el intercambio de las variables $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. El significado físico de lo anterior es que el efecto producido en el punto $\mathbf{r}_1$ por una fuente puntual unitaria colocada en $\mathbf{r}_2$, es el mismo efecto producido en el punto $\mathbf{r}_2$ por una fuente puntual unitaria colocada en el punto $\mathbf{r}_1$. La aseveración anterior es llamada RELACION DE RECIPROCIDAD.

Nótese que esta relación de reciprocidad establecida en base a la simetría de la Función de Green , se obtuvo considerando una ecuación del tipo de (1), por lo que no necesariamente se aplica para otro tipo de ecuaciones.

Ecuaciones del tipo de (1) son, por ejemplo: la ecuación de Helmholtz, la ecuación de Poisson, la ecuación de Laplace, etc.

c).- Ahora consideremos lo que podemos llamar la propiedad RESOLUTIVA de la Función de Green. Para esto consideremos la siguiente ecuación diferencial no homogénea :

$$\hat{L}\, y(\mathbf{r}_1) = -f(\mathbf{r}_1)$$

Trataremos de resolverla determinando la Función de Green correspondiente. Para esto, planteamos primero que la Función de Green que buscamos, es la solución de la ecuación diferencial planteada al principio, para el caso de una fuente puntual unitaria, esto es, la Función de Green que deseamos determinar cumple con :

$$\hat{L}_1\, G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

además de ciertas condiciones frontera de las que nos ocuparemos más adelante. $\hat{L}_1$ significa que $\hat{L}$ opera sobre $\mathbf{r}_1$.

Supongamos que el operador $\hat{L}$ tiene la forma :

$$\hat{L}_1 = \nabla_1 \cdot [\, p(\mathbf{r}_1)\nabla_1] + q(\mathbf{r}_1)$$

de modo que, si aplicamos la Segunda fórmula de Green :

$$\int_{VOL} [v(r_2)\hat{L}_2 u(r_2) - u(r_2)\hat{L}_2 v(r_2)]\, d\tau_2$$

$$= \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\, [v(\mathbf{r}_2)\nabla_2 u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_2)\nabla_2 v(\mathbf{r}_2)] \cdot d\mathbf{s}_2$$

haciendo $u(\mathbf{r}_2) = y(\mathbf{r}_2)$ y $v(\mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)$, tenemos:

$$\int_{VOL} [-G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) + y(\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\, d\tau_2$$

$$= \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\, [G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\nabla_2 y(\mathbf{r}_2) - y(\mathbf{r}_2)\nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)] \cdot d\mathbf{s}_2$$

Realizando la integración del término que contiene $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ obtenemos:

$$- \int_{VOL} G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2 + y(\mathbf{r}_1)$$

$$= \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\, [G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\nabla_2 y(\mathbf{r}_2) - y(\mathbf{r}_2)\nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)] \cdot d\mathbf{s}_2$$

donde hemos considerado que el volumen de integración contiene al punto $\mathbf{r}_2$. Ahora, si ordenamos los términos de la expresión anterior, tenemos:

$$y(\mathbf{r}_1) = \int_{VOL} G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2 + \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\, [G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\nabla_2 y(\mathbf{r}_2)] \cdot d\mathbf{s}_2$$

$$- \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\, [y(\mathbf{r}_2)\nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)] \cdot d\mathbf{s}_2. \qquad (4)$$

que podemos considerar como la solución general a nuestro problema, pero teniendo en cuenta que todavía no hemos especificado y mucho menos tomado en cuenta las condiciones en la frontera, por lo que la Función de Green que buscamos, aún no está completamente definida. Por lo regular, las condiciones frontera para cada caso en particular nos darán soluciones diferentes, como a continuación se muestra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1 : Si en nuestro problema, la ecuación diferencial es no homogénea, mientras que las condiciones frontera son homogéneas del tipo de Dirichlet (lo que significa que la función debe anularse en la frontera), es razonable esperar que la Función de Green correspondiente también cumpla con tales condiciones en la frontera. Por lo tanto, (4) nos queda en este caso como sigue:

$$y(\mathbf{r}_1) = \int_{VOL} G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\, f(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2$$

(Ver * en página 9)

Ejemplo 2 : Si ahora nuestra ecuación diferencial es homogénea, con condiciones frontera no homogéneas del tipo de Dirichlet (la función no se anula en la frontera), podemos escoger que nuestra Función de Green cumpla la ecuación diferencial no homogénea y condiciones frontera homogéneas del tipo de Dirichlet, de manera que ,en este caso (4) nos queda :

$$y(\mathbf{r}_1) = \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\left[y(\mathbf{r}_2)\nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\right]\cdot d\mathbf{s}_2$$

que también podemos escribir como :

$$y(\mathbf{r}_1) = \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2) g(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) y(\mathbf{r}_2) ds_2$$

donde $g(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = \nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)$ es llamada Función de Green para condición frontera. Como puede apreciarse, $g(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)$ es la componente normal del gradiente de la Función de Green pues :

$$\nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{s}_2 = \frac{\partial G}{\partial n_2} ds_2$$

donde n_2 es la normal unitaria a la superficie de la frontera.

Ejemplo 3: Si nuestro caso es ahora el de una ecuación diferencial no homogénea, con condiciones frontera homogéneas del tipo de Neumann (la componente normal del gradiente de la función se anula en la frontera), podemos escoger nuestra Función de Green de modo que cumpla con la misma ecuación diferencial no homogénea, pero debemos tener cuidado al escoger la condición frontera pues si , por ejemplo , escogemos que la Función de Green también cumpla las condiciones frontera homogéneas de Neumann, tendremos lo siguiente:

Si tomamos la ecuación diferencial no homogénea con la cual cumple $G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)$ e integramos sobre un volumen V que contenga al punto $\mathbf{r}_2$, obtendremos

$$\int_{VOL} \left\{ \nabla_2 \cdot \left[p(\mathbf{r}_2) \nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) \right] + q(\mathbf{r}_2)\, G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) \right\} d\tau_2 = \int_{VOL} \left\{ -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right\} d\tau_2$$

$$\int_V q(\mathbf{r}_2)\, G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\, d\tau_2 = -1$$

lo que no se cumple , si por ejemplo , $q(r) = 0$. Entonces, no es conveniente que la Función de Green que buscamos cumpla con la condición frontera homogénea de Neumann. Podemos tratar en cambio con la siguiente condición frontera : Que la componente normal del gradiente de $G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)$ sea igual a una constante (C) sobre la superficie frontera.

De esta forma obtenemos:

$$\int_{VOL}\left\{\nabla_2\cdot\left[\, p(\mathbf{r}_2)\nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\right] + q(\mathbf{r}_2)\ G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\right\}d\tau_2 = \int_{VOL}\left\{-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\right\}d\tau_2$$

$$\int_{VOL}\left\{\nabla_2\cdot\left[\, p(\mathbf{r}_2)\mathbf{C} + q(\mathbf{r}_2)\ G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\right\}d\tau_2 = -1$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia:

$$\oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\,C\,ds_2 + \oint_{SUP} q(\mathbf{r}_2)\ G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\,ds_2 = -1$$

de donde podemos obtener :

$$\mathbf{C} = \frac{-\oint_{SUP} q(\mathbf{r}_2)\ G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\,ds_2 + 1}{\oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\,ds_2}$$

Por lo tanto, tenemos que (4) nos queda finalmente:

$$y(\mathbf{r}_1) = \int_{VOL} G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\,f(\mathbf{r}_2)\,d\tau_2 - C\oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2)\,y(\mathbf{r}_2)\,ds_2$$

Es interesante ver qué forma toma la anterior expresión para algunos casos especiales; por ejemplo, si la función $p(r)$ es igual a la unidad, la solución es :

$$y(r_1) = \int_{VOL} G(r_1|r_2) f(r_2) d\tau_2 - C\oint_{SUP} y(r_2) ds_2$$

con C dada por:

$$C = \frac{-\oint_{SUP} q(r_2)\ G(r_1|r_2) ds_2 + 1}{A}$$

donde se ha sustituído $\oint_{SUP} ds_2$ por el área A de la superficie sobre la que estamos integrando.

Si además tenemos que q(r) es igual a cero , nuestra ecuación original se convierte en la ecuación de Poisson, y la solución toma la forma:

$$y(r_1) = \int_{VOL} G(r_1|r_2) f(r_2) d\tau_2 - \frac{1}{A}\oint_{SUP} y(r_2) ds_2$$

lo que también ocurre si a la Función de Green le imponemos la condición de que se anule en la frontera.

Nótese que el segundo término de la derecha de nuestra solución no lo podemos evaluar hasta que conozcamos a y(r); sin embargo, dicho término es una constante. Así que la expresión anterior, nos da la solución a nuestro problema excepto por una constante, lo que es aceptable para muchos problemas físicos, tales como los relacionados con potenciales electrostáticos.

FUNCION DE GREEN PARA UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARDIA NO HOMOGENEA DEL TIPO DE STURM - LIOUVILLE.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - s(x)y = f(x)$$

sujeta a ciertas condiciones frontera. Vamos a resolverla determinando la Función de Green correspondiente.

Primeramente planteamos la ecuación para la Función de Green:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG}{dx}\right] - s(x)G = \delta(x-\xi)$$

que corresponde al caso de una fuente puntual unitaria colocada en el punto $x = \xi$. Podemos esperar que la Función de Green que buscamos, sea continua en $x = \xi$; pero no podemos esperar lo mismo de la derivada de G en el mismo punto. Para checar esto, integraremos la ecuación diferencial planteada para $G(x|\xi)$ entre los límites $x = \xi - \varepsilon$ y $x = \xi + \varepsilon$:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG}{dx}\right] - s(x)G\right\}dx = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\delta(x-\xi)\,dx$$

$$\left[p(x)\frac{dG}{dx}\right]_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}s(x)G\,dx = 1$$

en el límite cuando ε tiende a cero, la integral se anula, pues tanto la Función de Green como la función $s(x)$ se suponen contínuas en $x = \xi$, por lo que nos queda :

$$\left[p(\xi)\frac{dG}{dx}\right]_{\xi+0} - \left[p(\xi)\frac{dG}{dx}\right]_{\xi-0} = 1$$

en el límite cuando ε tiende a cero. Esta expresión también puede escribirse de la siguiente forma:

$$p(\xi)\left[\left.\frac{dG}{dx}\right|_{\xi+0} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{\xi-0} \right] = 1$$

por lo que tenemos :

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{\xi+0} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)}$$

De esta última expresión, concluímos que $\frac{dG}{dx}$ tiene un salto de discontinuidad en $x = \xi$ cuya magnitud es de $\frac{1}{p(\xi)}$.

Por otro lado, supongamos que nuestro problema está planteado en el intervalo $[\ a\ ,\ b\ ]$, con $a < \xi < b$ y que también tenemos las dos funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ que cumplen con lo siguiente :

$G_1(x|\xi) = c_1u_1(x)$ satisface la ecuación diferencial para G en el intervalo $a \leq x < \xi$, junto con la condición frontera en $x = a$.

$G_2(x|\xi) = c_2u_2(x)$ satisface la ecuación diferencial para G en el intervalo $\xi < x \leq b$, junto con la condición frontera en $x = b$.

Por lo tanto, la Función de Green que buscamos puede ser expresada en términos de $u_1(x)$ y $u_2(x)$, en forma seccionada , como se muestra a continuación:

$$G(x|\xi) = \begin{cases} c_1u_1(x) & , \quad a \leq x < \xi \\ c_2u_2(x) & , \quad \xi \leq x < b \end{cases}$$

Veamos ahora qué relación debe haber entre las funciones u_1 y u_2 , así como los valores que deben tener las constantes c_1 y c_2 para que la Función de Green exista.

Primeramente aplicaremos la condición de continuidad de la Función de Green en el punto $x = \xi$, de lo que obtenemos:

$$c_1 u_1(\xi) = c_2 u_2(\xi) \qquad (5)$$

Por otra parte, aplicando la condición del salto de discontinuidad de la derivada en el punto $x = \xi$, tenemos :

$$c_2 u_2'(\xi) - c_1 u_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \qquad (6)$$

Resolviendo (5) y (6) simutáneamente, obtenemos :

$$c_1 = \frac{u_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)} \qquad \text{y} \qquad c_2 = \frac{u_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}$$

donde

$$W(\xi) = u_1(\xi)u_2'(\xi) - u_2(\xi)u_1'(\xi)$$

es el Wronskiano de las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ evaluado en el punto . $x = \xi$.

Podemos decir entonces que si el Wronskiano de las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ no se anula en el punto $x = \xi$, la Función de Green para nuestro caso existe, y está dada de acuerdo a la siguiente expresión:

$$G(x|\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_2(\xi)u_1(x)}{W(\xi)p(\xi)}, & a \le x < \xi \\ \dfrac{u_1(\xi)u_2(x)}{W(\xi)p(\xi)}, & \xi < x \le b \end{cases} \qquad (7)$$

Si llegara a ocurrir que $u_1(x) = ku_2(x)$, donde k es una constante, entonces tendríamos que $W(\xi) = 0$ y la Función de Green no existiría, por lo que podemos afirmar que si las funciones u_1 y

u_2 no son linelmente independientes, la Función de Green , en ese caso, no existe.

De la fórmula anterior para G, podemos notar que se cumple la propiedad de simetría, es decir :

$$G(x|\xi) = G(\xi|x)$$

lo que era de esperarse tomando en cuenta que estamos trabajando con una ecuación del tipo de Sturm-Liouville.

La solución a nuestro problema queda entonces expresada de la siguiente forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x|\xi)\ f(\xi)\ d\xi \qquad (8)$$

La utilización de la fórmula (7) es posible, siempre y cuando se conozcan las soluciones para la ecuación diferencial homogénea correspondiente y que ésta sea del tipo de Sturm-Liouville. Pero de cualquier manera, la Función de Green también puede ser construída por otros métodos , uno de los cuales consiste en determinar su expansión en términos de una serie de funciones ortogonales apropiadas. Como ejemplo de esto, consideremos el problema consistente en la siguiente ecuación diferencial no homogénea :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

sujeta a las condiciones frontera dadas por :

$$y(0) = y(L) = 0 .$$

Debemos entonces obtener una Función de Green que satisfaga la ecuación:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x-\xi) \tag{9}$$

y las condiciones frontera :

$$G(0|\xi) = G(L|\xi) = 0$$

lo que nos sugiere que podemos intentar representar a $G(x|\xi)$ mediante una serie de Fourier de tipo senoidal, tal como la que a continuación se muestra:

$$G(x|\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{10}$$

Con $G(x|\xi)$ dado de esta manera, se cumplen las condiciones frontera homogéneas mencionadas arriba.

Ahora, calculando la derivada de $G(x|\xi)$ a partir de su expresión en términos de una serie senoidal de Fourier, tenemos :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[G(x|\xi)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\right)\gamma_n(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

mientras que para la delta tenemos :

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial las expansiones obtenidas :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\right)\gamma_n(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ordenando términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\right)\gamma_n(\xi) - \frac{2}{L}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

De esta última expresión podemos plantear:

$$\left(\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\right)\gamma_n(\xi) - \frac{2}{L}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) = 0$$

por lo que $\gamma_n(\xi)$ nos queda:

$$\gamma_n(\xi) = \frac{-2L\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)}{n^2\pi^2}$$

Mientras que para $G(x|\xi)$ obtenemos :

$$G(x|\xi) = -\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)}{n^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (11)$$

Podemos decir entonces que la solución a nuestro problema está dada por la siguiente expresión:

$$y(x) = -\frac{2L}{\pi^2}\int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)}{n^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)f(\xi)\,d\xi \qquad (12)$$

lo que verificaremos a continuación.

Primeramente, calculemos $\frac{dy}{dx}$, para lo cual haremos uso de la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dz}\int_{a(z)}^{b(z)} g(z,t)\,dt = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial g(z,t)}{\partial z}dt + g[z,b(z)]\frac{db(z)}{dz} - g[z,a(z)]\frac{da(z)}{dz}$$

La derivada nos queda entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2L}{\pi^2}\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n\pi}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(\xi)\,d\xi$$

Calculando ahora la segunda derivada :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(\xi)\,d\xi$$

Pero

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Por lo que tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^L \delta(x-\xi) f(\xi)\,d\xi = f(x)$$

Lo que demuestra que (12) es la solución de nuestra ecuación ya que también cumple con las condiciones $y(0) = y(L) = 0$.

FUNCIONES DE GREEN EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Consideremos de nuevo la ecuación (4) :

$$y(\mathbf{r}_1) = \int_{VOL} G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) d\tau_2 + \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2) \left[G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) \nabla_2 y(\mathbf{r}_2)\right] \cdot ds_2$$

$$- \oint_{SUP} p(\mathbf{r}_2) \left[y(\mathbf{r}_2) \nabla_2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\right] \cdot ds_2. \qquad (4)$$

la cual es nuestra solución para una ecuación diferencial del tipo

$$\left[\nabla_1 \cdot \left[\, p(\mathbf{r}_1) \nabla_1\right] + q(\mathbf{r}_1)\right] y(\mathbf{r}_1) = -f(\mathbf{r}_1)$$

A continuación consideraremos dos casos especiales de la anterior ecuación y veremos qué forma adopta la Función de Green correspondiente. Primeramente, si $p(\mathbf{r}_1) = 1$ y $q(\mathbf{r}_1) = 0$, nuestra ecuación diferencial se convierte en :

$$\nabla^2 y(\mathbf{r}_1) = -f(\mathbf{r}_1)$$

la cual es la llamada ecuación de Poisson.

La Función de Green correspondiente debe cumplir con :

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Si integramos ésta ecuación sobre una pequeña esfera centrada en el punto $\mathbf{r}_2$ y cuyo radio es $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ obtenemos:

$$\int_{VOL} \nabla^2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) d\tau_1 = \int_{VOL} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\tau_1 = -1$$

lo que también podemos expresar, utilizando el Teorema de la

Divergencia, como :

$$\oint_{SUP} \nabla G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\cdot d\mathbf{s}_1 = -1$$

Llevando a cabo la integración obtenemos:

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)}{\partial r_{12}} 4\pi (r_{12})^2 = -1$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)}{\partial r_{12}} = \frac{-1}{4\pi (r_{12})^2}$$

Si integramos ésta última expresión obtenemos :

$$G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$$

que es la Función de Green para la ecuación de Poisson para el caso tridimensional . La solución queda entonces :

$$y(\mathbf{r}_1) = \int_{VOL} \frac{-1}{4\pi |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} f(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2$$

Esta función cumple con la condición frontera que nos dice que la función se anule en ∞.

Nuestro siguiente ejemplo se refiere también a la ecuación diferencial de Poisson, pero ahora en dos dimensiones.

La Función de Green continúa cumpliendo con

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

de donde obtenemos, después de integrar , lo siguiente:

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)}{\partial r_{12}} 2\pi r_{12} = -1$$

realizando en este caso la integración sobre una superficie circular centrada en $\mathbf{r}_2$ y con radio $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Integrando la última expresión obtenemos :

$$G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Ln}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

$$G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Ln}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{-1}$$

$$G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Ln}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\right]$$

que es la Función de Green para nuestro caso bidimensional.

FUNCIONES DE GREEN PARA CONDICIONES INICIALES Y CONDICIONES FRONTERA NO HOMOGENEAS.

Consideremos el siguiente problema:

Queremos resolver la ecuación de calor unidimensional en el intervalo de $-\infty$ a $+\infty$ para "x" y desde 0 hasta ∞ para "t":

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

sujeta a la condición frontera de que $u(\pm\infty\ ,\ t) = 0$ y la condición inicial $u(x,0) = f(x)$.

Primeramente, notemos que la solución para nuestra ecuación depende linealmente de la función $f(x)$; esto quiere decir que si tenemos las funciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ que son las soluciones correspondientes a los casos en que la condición inicial es $f_1(x)$ y $f_2(x)$ respectivamente , entonces , $C_1u_1 + C_2u_2$ será la solución correspondiente al caso en que la condición inicial está dada por $C_1f_1 + C_2f_2$.

Esta propiedad nos sugiere que podemos buscar una función $g(x|\xi;t)$ tal que cumpla con la misma ecuación diferencial parcial que la función $u(x,t)$, junto con su condición frontera, pero que en cambio, su condición inicial esté dada por :

$$g(x|\xi;0) = \delta(x-\xi)$$

de manera que la solución a nuestro problema quede expresada como:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x|\xi;t)\,f(\xi)\,d\xi$$

donde a la función $g(x|\xi;t)$ es llamada FUNCION DE GREEN PARA CONDICIONES INICIALES.

Debido a las condiciones frontera que en este caso tenemos, podemos utilizar el método de la Transformada de Fourier para encontrar la función $g(x|\xi;t)$; si hacemos:

$$g_F(k|\xi;t) = \mathbb{F}\{g(x|\xi;t)\}$$

obtenemos entonces, transformando la ecuación diferencial y la condición inicial :

$$\frac{dg_F}{dt} = -a^2k^2g_F \qquad\qquad g_F(k|\xi;0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ik\xi}$$

Resolviendo la anterior ecuación y aplicando la condición inicial tenemos:

$$g_F(k|\xi;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ik\xi}e^{-a^2k^2t}$$

Calculando la Transformada Inversa de Fourier de ésta expresión , tenemos:

$$g(x|\xi;t) = \mathbb{F}^{-1}\{g_F(k|\xi;t)\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}$$

Por lo tanto, la solución a nuestro problema queda:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\, e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, f(\xi)d\xi$$

La comprobación de que realmente ésta expresión cumple con la ecuación de calor unidimensional puede hacerse, calculando las derivadas parciales respecto a "x" y respecto a "t" correspondientes y luego sustituyéndolas en la ecuación mencionada para verificar que se satisface. Eso es lo que a continuación haremos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \left(\frac{(x-\xi)^2}{4a^2} t^{-5/2} - \frac{1}{2} t^{-3/2} \right) e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} f(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(\frac{-2(x-\xi)}{4a^2 t} \right) e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} f(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(\frac{(x-\xi)^2}{a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right) e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} f(\xi)\, d\xi$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial las expresiones recién obtenidas, vemos que sí satisfacen tal ecuación. En lo que respecta a la condición inicial, si en la expresión que obtuvimos para $u(x,t)$, hacemos $t = 0$, tal expresión se nos indetermina, lo que nos indica que la condición inicial $f(x)$, debemos interpretarla como un límite , al cual tiende $u(x,t)$, cuando la variable tiempo tiende a cero (ya que $g(x|\xi;t)$ tiende a $\delta(x-\xi)$ cuando el tiempo tiende a cero).

Ahora supongamos que se nos plantea el siguiente problema:

De nueva cuenta tenemos la ecuación de calor unidimensional, pero ahora, la condición frontera solamente nos pide que la temperatura en uno de los extremos sea finita y en el otro sea una función del tiempo; mientras que la condición inicial es que la temperatura al tiempo cero sea cero, esto es , nuestro problema está formulado como sigue:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

con las condiciones : $u(\infty,t) < \infty$; $u(0,t) = v(t)$; $u(x,0) = 0$.

Pero ya que podemos considerar que las condiciones iniciales no son otra cosa que condiciones frontera para la variable tiempo, podemos esperar que la solución a nuestro problema sea expresable como:

$$u(x,t) = \int_0^t h(x;t|\tau)v(\tau)d\tau$$

donde la función $h(x;t|\tau)$ es una Función de Green que podemos llamar FUNCION DE GREEN PARA CONDICIONES FRONTERA , la cual nos representa la influencia de las condiciones frontera en la solución de nuestro problema.

Notemos que en la integral que nos da la solución de nuestro problema , la integración se lleva a cabo sobre la variable tiempo y que el intervalo de integración va desde cero hasta un cierto tiempo "t", lo cual se debe ,por una parte, a que suponemos que la función $v(t)$ es nula para cualquier instante anterior a $t = 0$; y por otro lado, es de esperarse que la función $u(x,t)$ no se vea influenciada por $v(\tau)$ para cualquier $\tau > t$.

Para empezar a resolver nuestro problema, primero aplicaremos a nuestra ecuación de calor la Transformada Senoidal de Fourier respecto a la variable "x", esto debido al dominio de la variable mencionada (La Transformada de Laplace es menos adecuada ya que no conocemos el valor de la primera derivada parcial de $u(x,t)$ respecto a x, evaluada en $x = 0$). Sea:

$$U_s(k,t) = \mathbb{F}_s\{u(x,t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\,\text{sen}kx\,dx$$

la Transformada Senoidal de Fourier de $u(x,t)$. Nuestra ecuación diferencial transformada queda entonces:

$$\frac{dU_s}{dt} + a^2k^2U_s = a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,kv(t)$$

una vez que le hemos aplicado también la condición frontera.

La ecuación diferencial para U_s la podemos resolver mediante la construcción de una Función de Green apropiada, por ejemplo, sea $\gamma(k;t|\tau)$ una Función de Green que es nula para $t<\tau$, que cumple con :

$$\frac{d\gamma}{dt} + a^2k^2\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\delta(t-\tau)$$

y que para $t>\tau$ cumple con la ecuación anterior en su versión homogénea, de modo que:

$$\gamma(k;t|\tau) = Ae^{-a^2k^2t} \qquad (t > \tau)$$

Si integramos la ecuación diferencial para γ, desde $\tau-0$ hasta $\tau+0$ obtenemos el valor de la constante de integración A:

$$A = e^{a^2k^2\tau}$$

así que :

$$\gamma(k;t|\tau) = e^{-a^2k^2(t-\tau)} \qquad (t > \tau)$$

Por lo tanto, U_s nos queda:

$$U_s(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, ka^2\int_0^t e^{-a^2k^2(t-\tau)}v(\tau)\,d\tau \qquad (13)$$

Antes de continuar con la obtención de u(x,t), comprobaremos que ésta última expresión cumple con la ecuación diferencial para U_s y con su condición inicial.

Primero calculemos la derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{dU_s}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k^3a^4\int_0^t e^{-a^2k^2(t-\tau)}v(\tau)\,d\tau + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, ka^2v(t)$$

Ahora, si multiplicamos $U_s(k,t)$ por a^2k^2 y se lo sumamos a la derivada que acabamos de calcular, obtendremos la ecuación diferencial para $U_s(k,t)$, por lo que concluímos que (13) es la solución de tal ecuación diferencial.

Por lo que respecta a la condición inicial $U_s(k,0) = 0$, es fácil ver que (13) cumple con ella.

Ahora sí le aplicaremos a $U_s(k,t)$ la Transformada Senoidal Inversa de Fourier para obtener finalmente la solución a nuestro problema original.

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_s(k,t)\ \text{sen}kx\ dk$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}a^2\int_0^\infty k\ \text{sen}kx\ dk\int_0^t e^{-a^2k^2(t-\tau)}v(\tau)d\tau$$

lo que también podemos expresar, después de intercambiar el orden de las integrales , de la siguiente manera:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}a^2\int_0^t v(\tau)d\tau\int_0^\infty k\ \text{sen}kx\ e^{-a^2k^2(t-\tau)}dk$$

Ahora, realizando la integral sobre k obtenemos:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}}e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}v(\tau)d\tau \qquad (14)$$

Verificaremos que ésta expresión realmente satisface nuestra ecuación diferencial de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^t \frac{v(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}}\left(\frac{-2x^2}{4a^2(t-\tau)} + 1\right)e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}d\tau$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{v(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}}\left(\frac{x^3}{4a^4(t-\tau)^2} - \frac{3x}{2a^2(t-\tau)}\right)e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}d\tau$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{v(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \left(\frac{x^3}{4a^2(t-\tau)^2} - \frac{3x}{2(t-\tau)} \right) e^{-x^2/4a^2(t-\tau)} d\tau$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la ecuación diferencial,vemos que sí la satisfacen, por lo que podemos decir que (14) es solución de nuestra ecuación unidimensional de calor.

Aquí otra vez debemos interpretar la condición frontera que nos dice :

$$u(0,t) = v(t)$$

como un caso límite cuando x tiende a cero .

De la expresión para u(x,t) obtenemos que nuestra Función de Green para condiciones frontera está dada por:

$$h(x;t|\tau) = \frac{x}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}$$

la cual, como ya se dijo, representa la influencia de las condiciones de la frontera en la solución de nuestro problema.

ESPECTRO CONTINUO DE EIGENVALORES

Aquí nos ocuparemos brevemente de lo que ocurre con la Fórmula Bilineal de la Función de Green en el caso en que el conjunto de eigenvalores del problema en cuestión resulte contínuo.

Tal como ya se mencionó, la Fórmula Bilineal de la Función de Green es:

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \sum_n \frac{\varphi_n^*(\mathbf{x}')\varphi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda}$$

donde $\varphi_n(\mathbf{x})$ y λ_n son las eigenfunciones y los eigenvalores respectivamente de un cierto operador diferencial Hermitiano, λ es una constante y la sumatoria se lleva cabo sobre todos los valores permisibles de n, tales que ,en éste caso, tenemos un conjunto discreto de eigenvalores.

Si el conjunto de los eigenvalores del operador correspondiente al problema que estemos tratando es continuo en vez de discreto, es de suponerse que la sumatoria de la Fórmula Bilineal se convierta en éste caso en una integral. Veamos tal situación en un caso particular:

Consideremos el problema de una cuerda infinita, estirada y vibrando bajo la acción de una cierta fuerza por unidad de longitud que varía armónicamente en el tiempo.

La ecuación que nos describe tal situación es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f(x)e^{-i\omega t}}{T}$$

y la condición frontera requiere simplemente que $u(x,t)$ sea acotada en todo punto.

Las soluciones de nuestra ecuación diferencial las esperamos de la forma:

$$u(x,t) = y(x,t)e^{-i\omega t}$$

de manera que el problema se reduce a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_o^2 y = -\frac{f(x)}{T}$$

donde $k_o^2 = \omega^2/c^2$.

La correspondiente Función de Green debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2G}{dx^2} + k_o^2 G = -\delta(x-\xi)$$

En este caso buscaremos para $G(x|\xi)$ una representación en forma de integral de Fourier, como se muestra a continuación:

$$G(x|\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k|\xi)\ e^{-ik\xi}dk$$

Aplicando la Transformada de Fourier a la ecuación diferencial para $G(x|\xi)$ nos queda:

$$-k^2 g(k|\xi) + k_o^2 g(k|\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{ik\xi}$$

de donde obtenemos:

$$g(k|\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik\xi}}{k_o^2 - k^2}$$

Aplicándole la Transformada Inversa de Fourier, nos queda:

$$G(x|\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\xi}e^{-ikx}}{k_o^2 - k^2} dk$$

Por lo que hemos obtenido una representación integral de la Función de Green , la cual podemos considerar como una generalización de la fórmula bilineal (Las eigenfunciones para nuestro problema están dadas por $\varphi(x) = e^{\pm ikx}$).

La solución de nuestro problema queda dada entonces por la siguiente expresión:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\xi}e^{-ikx}}{k_o^2 - k^2} f(\xi)\, dk d\xi$$

Podemos todavía simplificar un poco esta última expresión, realizando la integral sobre la variable k, pero esto es algo que por el momento no realizaremos.

CONSTRUCCION DE FUNCIONES DE GREEN MEDIANTE EL METODO DE IMAGENES.

Algunas veces nos encontramos con ciertos problemas de valores en la frontera , tales que los podemos ver como casos especiales de otro problema ya resuelto, del cual podemos tomar su solución y adaptarla a nuestro problema para llegar a su solución.

Un ejemplo de estos casos es cuando tenemos resuelto un determinado problema para un cierto dominio de la variable independiente y se nos presenta otro problema con condiciones muy similares pero con su dominio diferente : el dominio del nuevo problema es una de las mitades del problema ya resuelto de modo que podemos tratar de hacer una extensión apropiada (simétrica o asimétrica) de la solución del problema ya conocido, que es válida para el dominio completo de la variable independiente, sobre la mitad del dominio correspondiente al nuevo problema.

El tipo de extensión que se haga de la solución ya conocida dependerá de la condición impuesta en la frontera entre las dos mitades del dominio del problema ya resuelto.

Lo anterior significa lo siguiente:

Si tenemos la condición de que la función buscada debe anularse en la frontera entre los dominios, la extensión de la solución ya conocida se realizará asimétricamente.

Si tenemos la condición de que la componente del gradiente normal a la frontera entre los dominios debe anularse en tal sitio, la extensión de la solución ya conocida se realizará simétricamente.

Recordemos que si tenemos la función f(x) definida para $x>0$, y deseamos extenderla asimétricamente sobre la región $x<0$, nos quedará :

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

mientras que si deseamos extenderla simétricamente obtendremos:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estas ideas constituyen el llamado METODO DE IMAGENES , el cual podemos usar en la construcción de Funciones de Green, tal como se muestra en el siguiente doble ejemplo:

De nueva cuenta consideremos el problema de la ecuación de calor unidimensional planteado en la página 26, con todas sus condiciones excepto que ahora el dominio de x va desde cero hasta $+\infty$, esto es, el problema es ahora el de una barra semiinfinita.

La solución que obtuvimos anteriormente es:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\, e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t}\, f(\xi)d\xi$$

válida para el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

Si ahora se nos plantea el mismo problema para la parte del dominio donde x es mayor que cero y además se requiere que la solución se anule en el punto $x = 0$, lo que haremos será extender asimétricamente la solución obtenida anteriormente, de modo que obtenemos:

$$u(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi + \int_{-\infty}^{0} \frac{-f(-\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi$$

$$u(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi + \int_{+\infty}^{0} \frac{f(\xi')}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x+\xi')^2/4a^2t} d\xi'$$

donde hemos cambiado la variable de integración en la segunda integral : $-\xi = \xi'$; ahora, invirtiendo los límites de integración también en la segunda integral , haciendo $\xi' = \xi$ y agrupando:

$$u(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi - \int_{0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x+\xi)^2/4a^2t} d\xi$$

$$u(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2t} \right\} d\xi$$

que es nuestra solución para el intervalo $x > 0$, que cumple con la condición de ser nula en el punto $x = 0$, lo que es fácil de verificar.

Si ahora, para este mismo problema se nos cambia la condición en el punto $x = 0$, de modo que no sea la función la que se anule en tal punto sino su derivada respecto a x, lo que hacemos es realizar una extensión simétrica de la solución para el problema de la barra infinita sobre el intervalo $x < 0$:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi + \int_{-\infty}^{0} \frac{f(-\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi$$

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi + \int_{-\infty}^{0} \frac{-f(\xi')}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x+\xi')^2/4a^2t} d\xi'$$

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi + \int_{-\infty}^{0} \frac{-f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x+\xi)^2/4a^2t} d\xi$$

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}\, d\xi + \int_{0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x+\xi)^2/4a^2t} d\xi$$

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} + e^{-(x+\xi)^2/4a^2t} \right\} d\xi$$

que es nuestra solución para este segundo caso.

Para verificar que cumple con la condición en $x = 0$, calculemos primero su derivada respecto a x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ \frac{-2(x-\xi)}{4a^2t} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} + \frac{-2(x+\xi)}{4a^2t} e^{-(x+\xi)^2/4a^2t} \right\} d\xi$$

Ahora:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ \frac{-2(0-\xi)}{4a^2t} e^{-(0-\xi)^2/4a^2t} + \frac{-2(0+\xi)}{4a^2t} e^{-(0+\xi)^2/4a^2t} \right\} d\xi$$

Obtenemos:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ \frac{\xi}{4a^2 t} e^{-\xi^2/4a^2 t} + \frac{-\xi}{4a^2 t} e^{-\xi^2/4a^2 t} \right\} d\xi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\xi^2/4a^2 t} \left\{ \frac{\xi}{4a^2 t} + \frac{-\xi}{4a^2 t} \right\} d\xi$$

Donde podemos ver claramente que la condición en el punto frontera $x = 0$ se cumple.

Con el fin de comparar , las soluciones obtenidas son listadas a continuación:

Para el caso de la barra infinita:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} f(\xi) d\xi$$

Para la barra semiinfinita con $u(0,t) = 0$:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2 t} \right\} d\xi$$

Para la barra semiinfinita con $\partial u/\partial x = 0$ en $x = 0$:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} + e^{-(x+\xi)^2/4a^2 t} \right\} d\xi$$

EJEMPLO 1 :

Consideremos el oscilador armónico amortiguado gobernado por la ecuación:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{f(t)}{m}$$

donde $\lambda^2 > \omega_o^2$ (caso de sobreamortiguamiento). Supongamos que f(t) es nula para $t < 0$.

Desarrollar la Función de Green y escribir la solución que satisfaga las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$.

Modificar la solución para el caso en que $x(0) = a$ y $\dot{x}(0) = b$.

SOLUCION:

La Función de Green que necesitamos , $G(t|\tau)$ debe cumplir con la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2G}{dt^2} + 2\lambda \frac{dG}{dt} + \omega_o^2 G = \frac{\delta(t - \tau)}{m}$$

junto con las condiciones iniciales: $G(0|\tau) = 0$; $\dot{G}(0|\tau) = 0$.

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación diferencial para G, tenemos:

$$s^2G_L(s|\tau) - sG(0|\tau) - \dot{G}(0|\tau) + 2\lambda\left[sG_L(s|\tau) - G(0|\tau)\right]$$

$$+ \omega_o^2 G_L(s|\tau) = \frac{1}{m} e^{-s\tau} \quad ;$$

donde $: G_L = \mathcal{L}\left[\, G \,\right]$.

pero, tomando en cuenta las condiciones iniciales:

$$s^2 G_L + 2\lambda s G_L + \omega_o^2 G_L = \frac{e^{-s\tau}}{m}$$

$$G_L\left[s^2 + 2\lambda s + \omega_o^2 \right] = \frac{e^{-s\tau}}{m}$$

$$G_L = \frac{e^{-s\tau}}{m\left[s^2 + 2\lambda s + \omega_o^2 \right]}$$

$$G_L = \frac{e^{-s\tau}}{m(s + \lambda - \omega_1)(s + \lambda + \omega_1)}$$

con $\omega_1^2 = \lambda^2 - \omega_o^2$.

Ahora obtendremos $G(t|\tau)$ calculando la Transformada Inversa de Laplace para la función G_L:

$$G(t|\tau) = \pounds^{-1}\left\{ G_L \right\} = \frac{1}{m}\, \pounds^{-1}\left\{ \frac{e^{-s\tau}}{(s + \lambda - \omega_1)(s + \lambda + \omega_1)} \right\}$$

$$G(t|\tau) = \frac{1}{m}\, \pounds^{-1}\left\{ \frac{e^{-s\tau}}{2\omega_1 (s + \lambda - \omega_1)} - \frac{e^{-s\tau}}{2\omega_1 (s + \lambda + \omega_1)} \right\}$$

$$G(t|\tau) = \frac{1}{2m\omega_1} \pounds^{-1}\left\{ \frac{e^{-s\tau}}{s + \lambda - \omega_1} - \frac{e^{-s\tau}}{s + \lambda + \omega_1} \right\}$$

$$G(t|\tau) = \frac{1}{2m\omega_1}\left\{ \pounds^{-1}\left\{ \frac{e^{-s\tau}}{s + \lambda - \omega_1} \right\} - \pounds^{-1}\left\{ \frac{e^{-s\tau}}{s + \lambda + \omega_1} \right\} \right\}$$

Recordemos que :

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s - a} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\left\{\delta(t - t_o)\right\} = e^{-st_o}$$

Junto con la expresión de la transformada de Laplace para la convolución de las funciones f(t) y h(t) :

Convolución de f(t) y h(t) :

$$(f * h) \equiv \int_o^t f(\tau)\ h(t - \tau)\ d\tau$$

$$\mathcal{L}\left\{(f * h)\right\} = F(s)\ H(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(f * h)\right\} = (f * h) = \mathcal{L}\left\{F(s)\ H(s)\right\}$$

nos permite expresar a $G(t|\tau)$ de la siguiente manera:

$$G(t|\tau) = \frac{1}{2m\omega_1}\int_o^t \delta(t - \tau - z)\left\{e^{(\omega_1 - \lambda)z} - e^{-(\omega_1 + \lambda)z}\right\}dz$$

de donde obtenemos :

$$G(t|\tau) = \frac{1}{2m\omega_1}\left\{e^{(\omega_1 - \lambda)(t - \tau)} - e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}\right\}$$

que también podemos escribir como :

$$G(t|\tau) = \frac{1}{2m\omega_1}\left\{\frac{e^{2\omega_1(t - \tau)} - 1}{e^{(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}}\right\}$$

La solución buscada puede expresarse entonces como :

$$x(t) = \int_o^t \frac{f(\tau)}{2m\omega_1} \left\{e^{(\omega_1 - \lambda)(t - \tau)} - e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}\right\} d\tau$$

La condición $x(0) = 0$ se cumple claramente.

Para comprobar que $\dot{x}(0) = 0$, calculemos $\dot{x}(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \int_o^t \frac{f(\tau)}{2m\omega_1} \left\{(\omega_1 - \lambda) e^{(\omega_1 - \lambda)(t - \tau)} + (\omega_1 + \lambda) e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}\right\} d\tau$$

$$+ \frac{f(t)}{2m\omega_1} \left\{e^{(\omega_1 - \lambda)(t - t)} - e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - t)}\right\} \frac{dt}{dt}$$

$$- \frac{f(o)}{2m\omega_1} \left\{e^{(\omega_1 - \lambda)(t - o)} - e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - o)}\right\} \frac{d(o)}{dt} -$$

$$\frac{dx}{dt} = \int_o^t \frac{f(\tau)}{2m\omega_1} \left\{(\omega_1 - \lambda) e^{(\omega_1 - \lambda)(t - \tau)} + (\omega_1 + \lambda) e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}\right\} d\tau$$

de donde podemos ver que también la condición $\dot{x}(0) = 0$ se cumple.

Ahora veremos si la expresión obtenida para $x(t)$ cumple también con la ecuación diferencial.

Para esto, calcularemos a continuación la segunda derivada de la función $x(t)$ respecto al tiempo.

Tenemos que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \int_0^t \frac{f(\tau)}{2m\omega_1}\left[(\omega_1 - \lambda)^2 e^{(\omega_1 - \lambda)(t - \tau)}\right]d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{f(\tau)}{2m\omega_1}\left[-(\omega_1 + \lambda)^2 e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}\right]d\tau + \frac{f(t)}{m}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$ en la ecuación diferencial para $x(t)$, obtenemos que se cumple con tal ecuación , por lo que podemos decir que la solución en este caso es:

$$\boxed{x(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{2m\omega_1}\left[e^{(\omega_1 - \lambda)(t - \tau)} - e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}\right]d\tau}$$

Si las condiciones iniciales son ahora $x(0) = a$ y $\dot{x}(0) = b$, a la solución ya obtenida $x(t)$, agregamos una función $x_p(t)$ tal que cumpla con la ecuación diferencial homogénea y con las condiciones iniciales $x_p(0) = a$ y $\dot{x}_p(0) = b$.

Entonces, $x_p(t)$ debe cumplir con :

$$\ddot{x}_p + 2\lambda\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = 0$$

por lo que $x_p(t)$ debe ser de la forma :

$$x_p(t) = A_1 e^{(\omega_1 - \lambda)t} + A_2 e^{-(\omega_1 + \lambda)t}$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos:

$$A_1 + A_2 = a \qquad y \qquad A_1(\omega_1 - \lambda) - A_2(\omega_1 + \lambda) = b$$

$$\longrightarrow \quad A_1 = \frac{b + a(\lambda + \omega_1)}{2\omega_1} \quad ; \quad A_2 = \frac{a(\omega_1 - \lambda) - b}{2\omega_1}$$

Así, $x_p(t)$ queda finalmente como :

$$\boxed{x_p(t) = \frac{1}{2w_1}\left\{\left[a(\omega_1 + \lambda) + b\right]e^{(\omega_1 - \lambda)t} + \left[a(\omega_1 - \lambda) - b\right]e^{-(\omega_1 + \lambda)t}\right\}}$$

y la solución total buscada, para el caso de las nuevas condiciones iniciales es :

$$\boxed{x(t) = x_p(t) + \int_o^t \frac{f(\tau)}{2m\omega_1}\left\{ e^{(\omega_1 - \lambda)(t - \tau)} - e^{-(\omega_1 + \lambda)(t - \tau)}\right\} d\tau}$$

En este ejemplo, para encontrar la Función de Green correspondiente, se sustituyó la fuente original ,que en este caso resultó ser una función del tiempo, por una fuente puntual unitaria , también dependiente del tiempo , la cual le entrega al sistema un solo pulso ; éste solo pulso es entregado en el instante en que $t = \tau$, ocurriendo que para cualquier otro tiempo, la fuente puntual unitaria no ejerce ningún efecto sobre el sistema. Al integrar , en la expresión para x(t), colectamos los efectos de todos los pulsos unitarios dados al sistema.

EJEMPLO 2 :

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - k^2y = f(x) \qquad , \qquad 0 \le x \le L$$

sujeta a las condiciones frontera :

$$y(0) = y(L) = 0 \ ,$$

obteniendo la Función de Green correspondiente, de la siguiente manera:

a).- Encontrar la Función de Green por construcción directa y mostrar que para $x < \xi$:

$$G(x|\xi) = - \frac{\text{senhkx}\cdot\text{senhk}(L-\xi)}{\text{ksenhkL}}$$

Obtener también la expresión de $G(x|\xi)$ para $x > \xi$.

b).- Resolver la ecuación diferencial para G:

$$G'' - k^2G = \delta(x-\xi)$$

utilizando el método de la serie senoidal de Fourier.

Mostrar la equivalencia entre los resultados obtenidos en estos dos incisos.

SOLUCION :

La Función de Green buscada debe cumplir con la ecuación:

$$G'' - k^2G = \delta(x-\xi)$$

Para el intervalo $0 \le x < \xi$ la solución de la ecuación diferencial es de la forma :

$$G(x|\xi) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$$

Pero tenemos la condición frontera: $G(0|\xi) = 0$, de donde obtenemos que :

$$A_1 = -A_2.$$

De esta manera, G nos queda:

$$G(x|\xi) = A_1(e^{kx} - e^{-kx})$$

$$G(x|\xi) = A\ senhkx \qquad (x < \xi)$$

Por otra parte, para el intervalo $\xi < x \le L$, la solución a la ecuación diferencial para G es de la forma:

$$G(x|\xi) = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx}$$

y aplicándole la condición frontera para $x = L$ obtenemos :

$$B_1 e^{kL} = -B_2 e^{-kL}$$

obteniendo para G la siguiente expresión:

$$G(x|\xi) = B_1 e^{kx} - B_1 e^{-kx+2kL}$$

$$G(x|\xi) = Be^{kL} senhk(x-L) \qquad (x > \xi)$$

Aplicando la condición de continuidad de $G(x|\xi)$ en el punto $x = \xi$:

$$A\,\mathrm{senh}\,k\xi = Be^{kL}\,\mathrm{senh}\,k(\xi - L)$$

Y la condición del salto de discontinuidad de la derivada de G en el punto $x = \xi$:

$$kBe^{kl}\cosh k(\xi - L) - Ak\cosh k\xi = 1$$

(Nótese que $p(x) = 1$)

y combinando estas dos últimas expresiones obtenemos:

$$A = \frac{\mathrm{senh}\,k(\xi - L)}{k\,\mathrm{senh}\,kL} \qquad y \qquad B = \frac{\mathrm{senh}\,k\xi}{e^{kL}k\,\mathrm{senh}\,kL}$$

por lo tanto, $G(x|\xi)$ nos queda:

$$\boxed{\begin{aligned} G(x|\xi) &= -\frac{\mathrm{senh}\,kx\cdot\mathrm{senh}\,k(L-\xi)}{k\,\mathrm{senh}\,kL} \qquad \text{para} \quad x < \xi \\ G(x|\xi) &= -\frac{\mathrm{senh}\,k\xi\cdot\mathrm{senh}\,k(L-x)}{k\,\mathrm{senh}\,kL} \qquad \text{para} \quad x > \xi \end{aligned}}$$

Tal como se pedía. Nótese que $G(x|\xi) = G(\xi|x)$.

Para el inciso b).- proponemos la siguiente forma para la Función de Green:

$$G(x|\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Nótese que las funciones senoidales escogidas para la expansión son las eigenfunciones para la ecuación: $G'' - k^2G = 0$, y que además cumplen con las condiciones frontera en $x = 0$ y $x = L$.

Calculando las derivadas de G respecto a x , tenemos:

$$\frac{dG}{dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi)\, \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi) \frac{-\, n^2\pi^2}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Mientras que para la $\delta(x-\xi)$ obtenemos:

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial para G obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi) \frac{-\, n^2\pi^2}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - k^2 \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n(\xi) \frac{-\, n^2\pi^2}{L^2} - k^2 A_n(\xi) - \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

De donde obtenemos:

$$A_n(\xi) \frac{-\, n^2\pi^2}{L^2} - k^2 A_n(\xi) - \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) = 0$$

$$A_n(\xi) \left\{ \frac{-\, n^2\pi^2}{L^2} - k^2 \right\} = \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)$$

Por lo que :

$$A_n(\xi) = - \frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi\xi}{L})}{L\left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} + k^2\right]}$$

De manera que $G(x|\xi)$ nos queda:

$$\boxed{G(x|\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} - \frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi\xi}{L})}{L\left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} + k^2\right]}\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})}$$

Ahora verificaremos la equivalencia entre los dos resultados obtenidos para $G(x|\xi)$.

Para hacer esto, expandamos la G obtenida en el inciso a) en una serie de senos , como la que se utilizó en el inciso b).

Tenemos entonces:

$$G(x|\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n(\xi)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})$$

donde:

$$C_n(\xi) = \frac{2}{L}\int_0^L G(x|\xi)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})\,dx$$

Sustituyendo en la expresión anterior la G obtenida en el inciso a) :

$$C_n(\xi) = \frac{2}{L}\int_0^{\xi} - \frac{\mathrm{senh}kx \cdot \mathrm{senh}k(L-\xi)}{k\,\mathrm{senh}kL}\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})\,dx$$

$$+ \frac{2}{L}\int_{\xi}^{L} - \frac{\mathrm{senh}k\xi \cdot \mathrm{senh}k(L-x)}{k\,\mathrm{senh}kL}\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})\,dx$$

Lo que también podemos expresar :

$$C_n(\xi) = \frac{2}{L}\frac{-\operatorname{senh}k(L-\xi)}{k\operatorname{senh}kL}\int_0^{\xi}\operatorname{senh}kx\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$+\ \frac{2}{L}\frac{-\operatorname{senh}k\xi}{k\operatorname{senh}kL}\int_{\xi}^{L}\operatorname{senh}k(L-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Integrando por partes, obtenemos para la primera integral el siguiente resultado:

$$\int_0^{\xi}\operatorname{senh}kx\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{k^2L^2}{k^2L^2+n^2\pi^2}\left[\frac{\cosh k\xi\operatorname{sen}(n\pi\xi/L)}{k}\right]$$

$$-\ \frac{k^2L^2}{k^2L^2+n^2\pi^2}\left[\frac{n\pi}{k^2L}\cos(n\pi\xi/L)\operatorname{senh}k\xi\right]$$

Mientras que para la segunda:

$$\int_{\xi}^{L}\operatorname{senh}k(L-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{k^2L^2}{k^2L^2+n^2\pi^2}\left[\frac{\cosh k(L-\xi)\operatorname{sen}(n\pi\xi/L)}{k}\right]$$

$$+\ \frac{k^2L^2}{k^2L^2+n^2\pi^2}\left[\frac{n\pi}{k^2L}\cos(n\pi\xi/L)\operatorname{senh}k(L-\xi)\right]$$

Sustituyendo en la expresión para $C_n(\xi)$ y haciendo operaciones obtenemos:

$$C_n(\xi) = \frac{-2L\operatorname{sen}(n\pi\xi/L)}{[k^2L^2+n^2\pi^2]\operatorname{senh}kL}\left[\operatorname{senh}k(L-\xi)\cosh k\xi + \operatorname{senh}k\xi\cosh k(L-\xi)\right]$$

pero:

$$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh}(a)\cosh(b) + \operatorname{senh}(b)\cosh(a)$$

por lo que:

$$\operatorname{senh}k(L-\xi)\cosh k\xi + \cosh k(L-\xi)\operatorname{senh}k\xi = \operatorname{senh}kL$$

de manera que C_n nos queda:

$$C_n(\xi) = -\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)}{L\left[\frac{n^2\pi^2}{L^2} + k^2\right]}$$

que es exactamente el coeficiente $A_n(\xi)$ de la expansión en series de senos de la Función de Green del inciso b). Por lo tanto, las expresiones obtenidas para la Función de Green en los incisos a) y b) son equivalentes.

Con este ejemplo podemos darnos cuenta de que el procedimiento para encontrar la Función de Green en un caso determinado, no es único, ocurriendo que los resultados obtenidos con diferentes métodos, parezcan diferentes a pesar de ser completamente equivalentes y perfectamente válidos.

EJEMPLO 3 :

Demostrar que la Función de Green apropiada para resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(k^2x - \frac{m^2}{x}\right)y = f(x)$$

con m entero , sujeta a la condición de estar acotada en $x = 0$,y además $y(a) = 0$, es:

$$G(x|\xi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{[J_m(k\xi)N_m(ka) - J_m(ka)N_m(k\xi)]}{J_m(ka)}J_m(kx) & (x \le \xi) \\ \\ \dfrac{\pi}{2}\dfrac{[J_m(kx)N_m(ka) - J_m(ka)N_m(kx)]}{J_m(ka)}J_m(k\xi) & (x \ge \xi) \end{cases}$$

También considerar el caso en el que $J_m(ka)=0$. Mostrar que si k es diferente de cero, entonces G no existe; pero si $k=0$ (con $m\neq0$), entonces G sí existe pero no como se da arriba.Evaluar G para éste último caso.

SOLUCION:

La Función de Green que necesitamos debe cumplir con :

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dG}{dx}\right) + \left(k^2x - \frac{m^2}{x}\right)G = \delta(x-\xi)$$

además de ser finita en $x = 0$ y ser nula en $x = a$.

Para $x < \xi$, la Función de Green debe ser de la forma:

$$G(x|\xi) = AJ_m(kx) \qquad (x < \xi)$$

para cumplir el requisito de ser finita en $x = 0$.

Para $x > \xi$, G es de la forma:

$$G(x|\xi) = B_1J_m(kx) + B_2N_m(kx)$$

y si le aplicamos la condición de ser nula en $x = a$, tenemos:

$$G(a|\xi) = B_1J_m(ka) + B_2N_m(ka) = 0$$

por lo que:

$$G(x|\xi) = \frac{-N_m(ka)B_2J_m(kx) + J_m(ka)B_2N_m(kx)}{J_m(ka)} \qquad (x > \xi)$$

Si aplicamos la condición de continuidad para G en $x = \xi$, obtenemos:

$$\frac{-N_m(ka)B_2J_m(k\xi) + J_m(ka)B_2N_m(k\xi)}{J_m(ka)} = AJ_m(k\xi)$$

Ahora aplicaremos la condición del salto de discontinuidad de la derivada de G en $x = \xi$, nótese que $p(x) = x$.

$$B_2\frac{[kN_m'(k\xi)J_m(ka) - kN_m(ka)J_m'(k\xi)]}{J_m(ka)} - AkJ_m'(k\xi) = 1/\xi$$

Ahora combinaremos estas dos últimas expresiones para obtener los valores de las constantes A y B_2.

Haciendo operaciones llegamos a que:

$$B_2 = \frac{J_m(k\xi)}{k\xi[N'_m(k\xi)J_m(k\xi)-N_m(k\xi)J'_m(k\xi)]} = \frac{\pi J_m(k\xi)}{2}$$

$$A = \frac{\pi[N_m(k\xi)J_m(ka)-J_m(k\xi)N_m(ka)]}{2J_m(ka)}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones para G, tenemos finalmente:

$$\boxed{G(x|\xi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{[J_m(k\xi)N_m(ka) - J_m(ka)N_m(k\xi)]}{J_m(ka)}\,J_m(kx) & (x \le \xi) \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{[J_m(kx)N_m(ka) - J_m(ka)N_m(kx)]}{J_m(ka)}\,J_m(k\xi) & (x \ge \xi) \end{cases}}$$

que es el resultado buscado.

Ahora consideremos el caso en el que $J_m(ka) = 0$.

Habíamos establecido, a partir de la continuidad de la Función de Green en el punto $x = \xi$, que:

$$B_1J_m(ka) + B_2N_m(ka) = 0$$

Pero si llegara a ocurrir que $J_m(ka) = 0$, la anterior expresión nos quedaría : $B_2N_m(ka) = 0$, de donde obtendríamos que la constante B_2 tendría que ser cero y tendríamos :

$$G(x|\xi) = B_1J_m(kx) \quad \text{para} \quad x > \xi \qquad \text{y}$$

$$G(x|\xi) = AJ_m(kx) \quad \text{para} \quad x < \xi \ .$$

Es decir, ocurre que la Función de Green para $x > \xi$ es un múltiplo de la G para $x < \xi$, por lo que no son linealmente independientes y así , no existe una Función de Green que cumpla con todas las condiciones de nuestro problema (al tratar de aplicar la *condición del salto de discontinuidad en* $x = \xi$, llegamos a $1/\xi = 0$, lo que no puede ser en nuestro caso).

Pero si ahora consideramos el caso en el que $k = 0$, con $m \neq 0$, tendremos que la ecuación diferencial que debe cumplir G toma la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dG}{dx}\right) - \frac{m^2}{x}G = \delta(x-\xi)$$

La solución de ésta ecuación para $x < \xi$ nos queda:

$$G(x|\xi) = Ax^m \qquad \text{para} \quad x < \xi$$

Mientras que para $x > \xi$ tenemos :

$$G(x|\xi) = B[x^m - a^{2m}x^{-m}] \qquad \text{para} \quad x > \xi$$

una vez que ya hemos aplicado la condición para que la Función de Green se anule en $x = a$.

De nuevo aplicamos las condiciones de continuidad de G en el punto $x = \xi$ y de salto de discontinuidad de la derivada de G respecto a x en el mismo punto y obtenemos:

$$A\xi^m = B[\xi^m - a^{2m}x^{-m}] \qquad y$$

$$Bm[\xi^{m-1} + a^{2m}\xi^{-m-1}] - Am\xi^{m-1} = 1/\xi$$

combinando éstas dos últimas expresiones llegamos a que:

$$B = \frac{\xi^m}{2ma^{2m}} \qquad y \qquad A = \frac{\xi^{2m} - a^{2m}}{2ma^{2m}\xi^m}$$

y entonces la Función de Green para nuestro caso nos queda:

$$\boxed{G(x|\xi) = \begin{cases} \dfrac{[\xi^{2m} - a^{2m}]x^m}{2ma^{2m}\xi^m} & x \le \xi \\[2ex] \dfrac{[x^{2m} - a^{2m}]\xi^m}{2ma^{2m}x^m} & x \ge \xi \end{cases}}$$

con $k = 0$ y $m \neq 0$.

En este ejemplo, obtuvimos en el inciso a) una expresión para la Función de Green en términos de las Funciones de Bessel J_m y N_m en la cual se puede apreciar la ya mencionada propiedad de simetría de la Función de Green (esto es así debido a que la ecuación de Bessel , que es la ecuación con la que trabajamos en este problema, es del tipo de Sturm-Liouville).

En el inciso b) recordamos lo mencionado acerca de la independencia lineal de las dos expresiones que forman parte de la Función de Green ,correspondientes a los dos intervalos en los que se aplica ésta.

EJEMPLO 4 :

Consideremos el problema de valor frontera:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(L) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le L$$

a).- Escribir la fórmula bilineal para la Función de Green asociada al problema.

b).- Obtener $G(x|\xi)$ en forma cerrada.

c).- Verificar la equivalencia de los resultados de a) y b).

SOLUCION :

Para poder escribir la fórmula bilineal de la Función de Green, necesitamos los eigenvalores y las eigenfunciones del problema homogéneo; en este caso son :

Eigenvalores : $\quad -(2n-1)^2\pi^2/L^2 \quad$ con $n = 1,2,3,\ldots.$

Eigenfunciones normalizadas:

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) \qquad \text{con } n = 1,2,3,\ldots$$

Con esto, la fórmula bilineal para la Función de Green nos queda:

$$G(x|\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{L}}\ \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\ \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi \xi}{L}\right)}{\frac{-(2n-1)^2\pi^2}{L^2}}$$

Lo que también podemos expresar como:

$$\boxed{G(x|\xi) = \frac{-2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{L}\right)}{(2n-1)^2}}$$

Ahora buscaremos la Función de Green de otra forma.

La ecuación y condiciones que debe satisfacer G son:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x-\xi), \quad G(0|\xi) = 0, \quad G'(L|\xi) = 0$$

Las soluciones de la ecuación , una vez tomadas en cuenta las condiciones frontera son:

$$G(x|\xi) = Ax \quad \text{para} \quad x < \xi \quad \text{y} \quad G(x|\xi) = B \quad \text{para} \quad x > \xi$$

Aplicando ahora la condición de continuidad para G y de discontinuidad para la derivada de G respecto a x en $x = \xi$, obtenemos:

$$A = -1 \quad , \quad B = -\xi$$

por lo tanto, nuestra Función de Green queda finalmente:

$$\boxed{G(x|\xi) = \begin{cases} -x & x \le \xi \\ -\xi & x \ge \xi \end{cases}}$$

Para verificar la equivalencia de las expresiones obtenidas para G, realizaremos la expansión de la segunda de ellas en términos de una serie senoidal, como se muestra a continuación:

$$G(x|\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$$

la constante $A_n(\xi)$ la calcularemos como sigue:

$$A_n(\xi) = \frac{2}{L}\int_0^L G(x|\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)dx$$

Sustituyendo la expresión obtenida para G en el inciso b) :

$$A_n(\xi) = \frac{2}{L}\int_0^{\xi} -x\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)dx + \frac{2}{L}\int_{\xi}^{L} -\xi\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)dx$$

Haciendo operaciones:

$$A_n(\xi) = \frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{L}\right)$$

Por lo que la expansión nos queda:

$$\boxed{G(x|\xi) = \frac{-2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi\xi}{L}\right)}{(2n-1)^2}}$$

Tal como en el inciso a).

EJEMPLO 5:

Consideremos la ecuación diferencial : $y'' - k^2y = f(x)$, en el rango de valores para la variable x desde $-\infty$ hasta $+\infty$, junto con la condición de que la función y(x) sea finita cuando x tienda ya sea a $-\infty$ como a $+\infty$.

a).- Mostrar que la Función de Green correspondiente a este caso está dada por :

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}e^{-k|x-\xi|} \qquad \text{para toda } x$$

b).- Resolver la ecuación $G'' - k^2G = \delta(x-\xi)$ mediante la Transformada de Fourier y mostrar que:

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ik'x}e^{-ik'\xi}}{k'^2 + k^2}dk'$$

Evaluar la integral y confirmar el resultado de a).

SOLUCION :

Para la ecuación $G'' - k^2G = \delta(x-\xi)$, tenemos que sus soluciones son:

$$G(x|\xi) = Ae^{kx} \quad \text{para} \quad x < \xi \qquad \text{y} \qquad G(x|\xi) = Be^{-kx} \quad \text{para} \quad x > \xi$$

Utilizando las condiciones de continuidad de G y del salto de discontinuidad de G′ en $x = \xi$, obtenemos:

$$A = -e^{-k\xi}/2k \qquad \text{y} \qquad B = -e^{k\xi}/2k$$

de manera que G nos queda entonces:

$$G(x|\xi) = \begin{cases} \dfrac{-e^{k(x-\xi)}}{2k} & ; \quad x \le \xi \\[2ex] \dfrac{-e^{-k(x-\xi)}}{2k} & ; \quad x \ge \xi \end{cases}$$

Lo que también puede escribirse:

$$\boxed{G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}\, e^{-k\,|x-\xi|} \qquad \text{para toda } x}$$

Ahora, volvamos a nuestra ecuación diferencial para G:

$$G'' - k^2 G = \delta(x-\xi)$$

Aplicándole la Transformada de Fourier:

$$\mathbb{F}\left[G'' - k^2 G\right] = \mathbb{F}\left[\delta(x-\xi)\right]$$

$$\mathbb{F}\left[G''\right] - \mathbb{F}\left[k^2 G\right] = \mathbb{F}\left[\delta(x-\xi)\right]$$

Continuando con las operaciones:

$$-k'^2 G_F - k^2 G_F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ik'\xi}$$

por lo tanto, G_F está dada por :

$$G_F(k'|\xi) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-ik'\xi}}{k'^2 + k^2}$$

Para obtener $G(x|\xi)$ calculemos la Transformada Inversa de Fourier de $G_F(k'|\xi)$:

$$G(x|\xi) = \mathbb{F}^{-1}\{G_F(k'|\xi)\}$$

$$\boxed{G(x|\xi) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ik'\xi}e^{ik'x}}{k'^2 + k^2}\,dk'}$$

como se pedía.

Para evaluar la integral anterior utilizaremos la fórmula:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x\, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \qquad (a > 0)$$

de la siguiente manera:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ik'\xi}e^{ik'x}}{k'^2 + k^2}\,dk' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ik'(x-\xi)}}{k'^2 + k^2}\,dk'$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik'(x-\xi)}}{k'^2 + k^2} dk' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos k'(x-\xi)}{k'^2 + k^2} dk' + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} k'(x-\xi)}{k'^2 + k^2} dk'$$

La segunda integral se anula, pues el integrando es una función impar, pero la primera no se anula y de hecho la podemos representar como:

$$I = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos k'(x-\xi)}{k'^2 + k^2} dk'$$

Realizando ahora el cambio de variable: $z = k'(x-\xi)$, queda:

$$I = 2(x-\xi)\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos z \, dz}{z^2 + b^2}$$

donde $b^2 = k^2(x-\xi)^2$

El valor de I es entonces:

$$I = \frac{\pi e^{-k(x-\xi)}}{k}$$

Y G nos queda:

$$\boxed{G(x|\xi) = \begin{cases} \dfrac{-e^{k(x-\xi)}}{2k} & ; \quad x \le \xi \\[2ex] \dfrac{-e^{-k(x-\xi)}}{2k} & ; \quad x \ge \xi \end{cases}}$$

comprobando el resultado del inciso a).

EJEMPLO 6:

Supongamos que en el ejemplo anterior, se cambia el rango de la variable x ,para que ahora sea : $0 \le x < +\infty$, con las condiciones de que y(x)sea finita cuando x tienda a $+\infty$ y también que $y(0) = 0$.

a).- Obtener la Función de Green correspondiente utilizando el método de imágenes.

b).- Verificar el resultado de a) resolviendo la ecuación diferencial para $G(x|\xi)$ mediante la Transformada Senoidal de Fourier.

SOLUCION :

Del problema anterior tenemos que la solución para el dominio $-\infty < x < +\infty$ está dada por :

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|}$$

expresión que corresponde al caso en que se tiene una fuente puntual unitaria en el punto $x = \xi$.

Para poder cumplir con la condición de que y(0) sea cero, extenderemos asimétricamente nuestra solución para la región en la que $x < 0$, de la siguiente manera:

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|} - \left[-\frac{1}{2k} e^{-k|x+\xi|}\right]$$

Continuando:

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}e^{-k|x-\xi|} + \frac{1}{2k}e^{-k|x+\xi|}$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}\left[e^{-k|x-\xi|} - e^{-k|x+\xi|}\right]$$

La extensión asimétrica que se ha realizado también puede interpretarse como el hecho de haber colocado en $x = -\xi$ una fuente negativa (sumidero), lo que también puede apreciarse en la última expresión de $G(x|\xi)$.

Ahora, si estamos en la región donde $x > \xi$:

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}\left[e^{-k(x-\xi)} - e^{-k(x+\xi)}\right]$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}e^{-kx}\left[e^{k\xi} - e^{-k\xi}\right]$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{k}e^{-kx}\operatorname{senh}k\xi$$

Si ahora estamos en la región en la que $x > \xi$:

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}\left[e^{-k(\xi-x)} - e^{-k(x+\xi)}\right]$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}e^{-k\xi}\left[e^{kx} - e^{-kx}\right]$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{k}e^{-k\xi}\operatorname{senh}kx$$

Por lo tanto:

$$\boxed{G(x|\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{k}\, e^{-k\xi} \mathrm{senh}\, kx & x < \xi \\ \\ -\dfrac{1}{k}\, e^{-kx} \mathrm{senh}\, k\xi & x > \xi \end{cases}}$$

es la Función de Green que buscamos.

Para comprobar lo anterior, resolveremos la ecuación diferencial para G mediante el uso de la Transformada Senoidal de Fourier:

La ecuación diferencial para G es:

$$G'' - k^2 G = \delta(x-\xi)$$

Aplicándole la Transformada Senoidal de Fourier obtenemos:

$$-k'^2 G_s - k^2 G_s = \sqrt{2/\pi}\ \mathrm{sen}\, k'\xi$$

donde: $$G_s(k'|\xi) = \mathbb{F}_s\{G(x|\xi)\}$$

G_s nos queda entonces:

$$G_s = -\sqrt{2/\pi}\, \frac{\mathrm{sen}\, k'\xi}{k'^2 + k^2}$$

Ahora, para obtener nuestra Función de Green, debemos obtener la Transformada Inversa Senoidal de Fourier de G_s:

$$G(x|\xi) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}k'\xi\operatorname{sen}k'x}{k'^2+k^2}dk'$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos k'(x-\xi)}{k'^2+k^2}dk' + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos k'(x+\xi)}{k'^2+k^2}dk'$$

$$G(x|\xi) = \frac{-e^{-k(x-\xi)}}{2k} + \frac{e^{-k(x+\xi)}}{2k}$$

Si estamos en $x > \xi$:

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}e^{-kx}\left[e^{k\xi} - e^{-k\xi}\right]$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{k}e^{-kx}\operatorname{senh}k\xi$$

Y si estamos en $x > \xi$:

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{2k}e^{-k\xi}\left[e^{kx} - e^{-kx}\right]$$

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{k}e^{-k\xi}\operatorname{senh}kx$$

Con lo que comprobamos el resultado de a).

EJEMPLO 7:

Queremos resolver la ecuación bidimensional de Laplace dentro de un círculo de radio a, sujeta a la condición frontera no homogénea $u(a,\theta) = f(\theta)$, siendo $f(\theta)$ una función dada de θ.

a).-Encontrar la Función de Green $g(r,\theta|\theta_o)$,en forma de una serie compleja de Fourier,tal que la solución de nuestro problema pueda expresarse como:

$$u(r,\theta) = \int_o^{2\pi} g(r,\theta|\theta_o)f(\theta_o)d\theta_o$$

b).- Evaluar la suma de la serie para mostrar que:

$$g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi}\frac{a^2 + r^2}{a^2 + r^2 - 2arcos(\theta-\theta_o)}$$

SOLUCION :

Este es un problema no homogéneo, ya que contiene condiciones frontera no homogéneas. Podemos tratar de resolverlo utilizando la llamada Función de Green para Condiciones Frontera, que nos muestra la influencia de las condiciones frontera sobre la solución de nuestro problema; la Función de Green que buscaremos cumple con la ecuación de Laplace $\nabla^2 g = 0$ además de la condición frontera ; $g(a;\theta|\theta_o) = \delta(x-\xi)$.

Por superposición, la solución de nuestro problema está dada por la integral:

$$u(r,\theta) = \int_{0}^{2\pi} g(r,\theta|\theta_o) f(\theta_o) d\theta_o$$

Para encontrar g , proponemos:

$$g(r,\theta|\theta_o) = A(\theta_o)R(r)\Theta(\theta)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Laplace bidimensional para g ,escrita en coordenadas polares, obtenemos:

$$r^2R'' + rR' + \lambda R = 0 \qquad y \qquad \Theta'' - \lambda\Theta = 0$$

$$\text{con} \quad \lambda = -n^2, \; n = 1,2,3,...$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones diferenciales son:

$$R(r) = Ar^n \qquad y \qquad \Theta(\theta) = B_1\cos n\theta + B_2\operatorname{sen} n\theta$$

Por lo que g nos queda:

$$g(r,\theta|\theta_o) = \sum_{n=0}^{+\infty} [A_n r^n \cos n\theta \; + \; B_n r^n \operatorname{sen} n\theta]$$

lo cual también podemos expresar mediante una serie compleja de

Fourier:

$$g(r,\theta|\theta_o) = C_o + \sum_{n=1}^{+\infty} Cn(\theta_o) r^n e^{in\theta} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_{-n}(\theta_o) r^{-n} e^{-in\theta}$$

$$g(r,\theta|\theta_o) = C_o + 2\sum_{n=1}^{+\infty} Cn(\theta_o) r^n e^{in\theta}$$

Si le aplicamos la condición frontera:

$$g(a,\theta|\theta_o) = C_o + 2\sum_{n=1}^{+\infty} Cn(\theta_o) a^n e^{in\theta} = \delta(\theta-\theta_o)$$

De manera que:

$$C_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\theta-\theta_o)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

$$C_n a^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\theta-\theta_o)\,e^{-in\theta}d\theta = \frac{e^{-in\theta_o}}{2\pi}$$

$$C_n = \frac{e^{-in\theta_o}}{2\pi} a^{-n}$$

De modo que la serie compleja de Fourier nos queda:

$$g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-in\theta_o}}{2\pi} a^{-n} r^n e^{in\theta}$$

$$g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} r^n e^{in(\theta-\theta_o)}$$

Finalmente nos tenemos:

$$\boxed{g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{a^n}e^{in(\theta-\theta_o)}}$$

Esta serie también la podemos expresar como sigue:

$$g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{a^n}e^{in(\theta-\theta_o)} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}$$

$$g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=o}^{+\infty}2\frac{r^n}{a^n}e^{in(\theta-\theta_o)} - \frac{1}{2\pi}$$

Hagamos los cambios de variable siguientes:

$R = r/a$ y $\phi = \theta - \theta_o$, de manera que nuestra expresión nos queda:

$$g = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=o}^{+\infty}2R^n e^{in\phi} - \frac{1}{2\pi}$$

Si aplicamos la fórmula :

$$\sum_{n=o}^{+\infty}R^n e^{in\phi} = \frac{1}{1 - Re^{in\phi}} \qquad \text{para } |R| < 1,$$

Obtenemos:

$$g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{a + re^{i(\theta-\theta_o)}}{a - re^{i(\theta-\theta_o)}}\right\}$$

$$g(r,\theta|\theta_o) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{a + r\cos(\theta-\theta_o) + ir\mathrm{sen}(\theta-\theta_o)}{a - r\cos(\theta-\theta_o) - ir\mathrm{sen}(\theta-\theta_o)}\right\}$$

Eliminando los términos imaginarios del denominador:

$$g(r,\theta|\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{a^2 - r^2 + [2ar\mathrm{sen}(\theta-\theta_0)]i}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\theta_0)}\right]\right\}$$

Pero como en nuestro problema, la solución es real, tomaremos solamente la parte real de la anterior expresión, por lo que nos queda:

$$\boxed{g(r,\theta|\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{a^2 + r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\theta_0)}}$$

Aquí, como se dijo al principio del ejemplo, utilizamos la llamada Función de Green para condiciones frontera no homogéneas, que es el caso de nuestro problema. Para encontrar la solución del problema se aplicaron la ideas dadas en la Parte V del presente escrito.

EJEMPLO 8:

Consideremos el movimiento de una cuerda estirada, representado por la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

con las condiciones frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

a).-Desarrollar, en la forma de una serie simple, las dos funciones de Green, $g_1(x|\xi;t)$ y $g_2(x|\xi;t)$, que nos dan las soluciones:

$$u_1(x,t) = \int_0^L g_1(x|\xi;t)\,u_o(\xi)\,d\xi \quad \text{y} \quad u_2(x,t) = \int_0^L g_2(x|\xi;t)\,v_o(\xi)\,d\xi$$

correspondientes a las condiciones iniciales :

i).- $u_1(x,0) = u_o(x)$, $\partial u_1/\partial t = 0$ en $t = 0$

ii).- $u_2(x,0) = 0$, $\partial u_2/\partial t = v_o(x)$ en $t = 0$

b).-Mostrar que la solución para el caso de vibraciones forzadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t)$$

puede representarse en la forma:

$$u(x,t) = \int_0^L d\xi \int_{-\infty}^{t} G(x|\xi;t|\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\tau$$

donde G satisface la ecuación :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$$

y la condición inicial causal : $G \equiv 0$ para $t < \tau$.

SOLUCION :

Caso i).- La Función de Green $g_1(x|\xi;t)$ debe satisfacer:

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}$$

junto con las condiciones: $g_1(0|\xi;t) = g_1(L|\xi) = 0$, además de las condiciones iniciales:

$$g_1(x,0) = \delta(x-\xi) \quad , \quad \partial g_1/\partial t = 0 \quad \text{en } t = 0$$

Proponemos:

$$g_1(x|\xi;t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

expresión que satisface las condiciones frontera.

Ahora, sustituyendo la anterior expresión en la ecuación para g_1 , obtenemos:

$$\frac{d^2 g_n}{dt^2} + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} g_n = 0$$

Cuyas soluciones son de la forma:

$$g_n(\xi,t) = C_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + D_n\text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

La forma de la función g_1 es entonces:

$$g_1(x|\xi;t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + D_n\text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Aplicándole la condición inicial de que la derivada de g_1 respecto al tiempo sea nula en $t = 0$, obtenemos : $D_n = 0$,por lo que nos queda:

$$g_1(x|\xi;t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ahora apliquemos la otra condición inicial:

$$g_1(x|\xi;0) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta(x-\xi)$$

de donde podemos obtener: $C_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)$, por lo que la expresión para g_1 nos queda finalmente:

$$\boxed{g_1(x|\xi;t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{+\infty}\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

Caso ii).-La Función de Green $g_2(x|\xi;t)$ debe satisfacer:

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2}$$

junto con las condiciones: $g_2(0|\xi;t) = g_2(L|\xi) = 0$, además de las condiciones iniciales:

$$g_2(x,0) = 0 \quad , \quad \partial g_2/\partial t = \delta(x-\xi) \quad \text{en } t = 0$$

Proponemos:

$$g_1(x|\xi;t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

expresión que satisface las condiciones frontera.

Ahora, sustituyendo la anterior expresión en la ecuación para g_2 , obtenemos:

$$\frac{d^2 h_n}{dt^2} + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} h_n = 0$$

Cuyas soluciones son de la forma:

$$h_n(\xi,t) = E_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + F_n sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

La forma de la función g_2 es entonces:

$$g_2(x|\xi;t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[E_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + F_n sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Aplicándole la condición inicial de que g_2 sea nula en $t = 0$, obtenemos : $E_n = 0$,por lo que nos queda:

$$g_2(x|\xi;t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ahora apliquemos la otra condición inicial:

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta(x-\xi)$$

de donde podemos obtener: $F_n = \frac{\sqrt{2L}}{n\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)$, por lo que la expresión para g_2 nos queda finalmente:

$$\boxed{g_2(x|\xi;t) = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

Ahora consideraremos el caso de las vibraciones forzadas.

Tenemos la ecuación diferencial para $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t)$$

Para resolverla, buscaremos una Función de Green que satisfaga la misma ecuación diferencial, pero sustituiremos la fuente $f(x,t)$ por una fuente puntual unitaria $\delta(x-\xi)\xi(t-\tau)$ colocada en el punto $x = \xi$ y que actúa únicamente en el instante en que $t = \tau$. Esto es, la Función de Green que buscaremos, satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$$

y las condiciones frontera : $G(0|\xi;t|\tau) = G(L|\xi;t|\tau) = 0$. Debe mencionarse el hecho de que debe ocurrir que nuestra Función de Green sea nula para cualquier tiempo $t < \tau$, ya que es hasta el instante $t = \tau$ cuando la fuente actúa, no pudiéndose dar el caso de que produzca algún efecto antes de ese momento.

Podemos esperar entonces que la solución a nuestro problema tenga la forma:

$$u(x,t) = \int_0^L d\xi \int_{-\infty}^{t} G(x|\xi;t|\tau)f(\xi,\tau)d\tau$$

donde la integración sobre la variable tiempo se lleva a cabo de manera que se consideren todas las influencias habidas antes y hasta el instante t.

Para empezar, proponemos que nuestra G sea dada por :

$$G(x|\xi;t|\tau) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty} G_n(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

que cumple con las condiciones frontera de anularse en los puntos $x = 0$ y $x = L$. Calculando las derivadas parciales de la anterior expresión obtenemos:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^2 G_n}{dt^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad y \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^2\pi^2}{L^2}\,G_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial para G :

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-c^2n^2\pi^2}{L^2}\,G_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^2 G_n}{dt^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{d^2 G_n}{dt^2} + \frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}\,G_n\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau)$$

Pero : $\delta(x-\xi) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, por lo que:

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{d^2 G_n}{dt^2} + \frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}\,G_n\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{2}{L}\delta(t-\tau)\sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ordenando :

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\left[\frac{d^2G_n}{dt^2} + \frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}G_n - \sqrt{\frac{2}{L}}\delta(t-\tau)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\right]\right\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

Por lo que podemos establecer la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2G_n}{dt^2} + \frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}G_n - \sqrt{\frac{2}{L}}\delta(t-\tau)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) = 0$$

Para solucionar esta ecuación, distinguiremos dos intervalos de tiempo:

Para $t < \tau$, G_n debe ser nula, pues la fuente puntual unitaria no ha actuado hasta ese momento, por lo que la cuerda todavía no empieza a vibrar.

Para $t > \tau$, la ecuación diferencial de Gn se convierte en una ecuación diferencial homogénea, cuya solución es de la forma:

$$G_n = M_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + N_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Ahora, aplicándole la condición de continuidad en $t = \tau$, obtenemos: $N_n = - M_n\operatorname{ctg}\left(\frac{n\pi c\tau}{L}\right)$ y si ahora le aplicamos la condición del salto de discontinuidad de la derivada respecto a t en el punto $t = \tau$, obtenemos , combinando estos dos últimos resultados:

$$M_n = -\frac{\sqrt{2L}}{n\pi c}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c\tau}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \quad \text{y} \quad N_n = \frac{\sqrt{2L}}{n\pi c}\cos\left(\frac{n\pi c\tau}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)$$

Por lo tanto, después de algunas simplificaciones, G_n nos queda de la siguiente forma:

$$G_n = \frac{\sqrt{2L}}{n\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c(t-\tau)}{L}\right)$$

y finalmente :

$$\boxed{G(x|\xi;t|\tau) = \frac{2}{\pi c}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c(t-\tau)}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

Comparando esta última expresión con la obtenida para g_2, podemos notar que :

$$G(x|\xi;t|\tau) = g_2(x|\xi;t-\tau)$$

Esto es comprensible si tomamos en cuenta que , en el caso de g_2, la cuerda vibra al ser pulsada en el instante $t = 0$, mientras que en el caso de G, la cuerda no es pulsada sino hasta el instante $t = \tau$. Es decir, tanto g_2 como G nos representan el efecto de una pulsación aplicada a la cuerda, pero en instantes distintos.

EJEMPLO 9 :

Encontrar la función de Green que satisface la ecuación de Laplace bidimensional $\nabla^2 g = 0$, dentro del rectángulo dado por $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$; junto con las condiciones frontera siguientes :

$$g(x|\xi;0|\eta) = \delta(x-\xi) \ , \ g(x|\xi;b|\eta) = 0 \ ,$$

$$g(0|\xi;y|\eta) = 0 \qquad , \ g(a|\xi;y|\eta) = 0 \ .$$

a).- Hacer esto mediante el desarrollo directo de una serie senoidal para g.

b).- Mostrar que :

$$g = \left. \frac{-\partial G(x|\xi;y|\eta)}{\partial\eta} \right|_{\eta = 0}$$

donde G es la Función de Green dada por :

$$G(x|\xi;y|\eta) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{m\pi} \frac{\operatorname{senh}\left[\frac{m\pi(b-\eta)}{a}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{m\pi y}{a}\right]}{\operatorname{senh}\left[\frac{m\pi b}{a}\right]} \operatorname{sen}(m\pi\xi/a)\operatorname{sen}(m\pi x/a) & (y < \eta) \\ -\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{m\pi} \frac{\operatorname{senh}\left[\frac{m\pi(b-y)}{a}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{m\pi\eta}{a}\right]}{\operatorname{senh}\left[\frac{m\pi b}{a}\right]} \operatorname{sen}(m\pi\xi/a)\operatorname{sen}(m\pi x/a) & (y > \eta) \end{cases}$$

La cual corresponde al problema de la deflexión estática de una membrana rectangular, debida a una fuerza unitaria que actúa en el punto (ξ,η) y que además tiene sus cuatro lados fijos (condiciones frontera homogéneas).

SOLUCION :

Tenemos que resolver la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas , sujeta a condiciones frontera homogéneas de Dirichlet en todos los lados de la membrana rectangular excepto en el lado $y = 0$, en el que se tiene : $u(x,0) = f(x)$.

La Función de Green para condiciones frontera que necesitamos debe cumplir también tanto con la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas , como con las condiciones frontera impuestas sobre $u(x,y)$.

Proponemos para g una expansión como la siguiente:

$$g(x|\xi;y|\eta) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi;y|\eta)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

la cual cumple con anularse en $x = 0$ y en $x = a$.

Calculando las derivadas parciales de g obtenemos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n(\xi;y|\eta)\,\frac{n^2\pi^2}{a^2}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^2 A_n}{dy^2}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace :

$$-\sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-A_n(\xi;y|\eta)\,\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{d^2 A_n}{dy^2}\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0$$

Obtenemos la ecuación diferencial para A_n :

$$\frac{d^2 A_n}{dy^2} - A_n \frac{n^2\pi^2}{a^2} = 0$$

que tiene como soluciones: $A_n = C_1 e^{n\pi y/a} + C_2 e^{-n\pi y/a}$

Sustituyendo en la expresión para g:

$$g(x|\xi;y|\eta) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[C_1 e^{n\pi y/a} + C_2 e^{-n\pi y/a} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Aplicándole la condición para y = b tendremos:

$$C_1 e^{2n\pi b/a} = -C_2$$

La expresión para g nos queda entonces :

$$g(x|\xi;y|\eta) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{+\infty} C_1 \left[e^{n\pi y/a} - e^{2n\pi b/a} e^{-n\pi y/a} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Ahora aplicaremos la condición para y = 0:

$$g(x|\xi;0|\eta) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{+\infty} C_1 \left[1 - e^{2n\pi b/a} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \delta(x-\xi)$$

Pero : $$\delta(x-\xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \xi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Por lo que podemos escribir que :

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} C_1\left\{1- e^{2n\pi b/a}\right\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{ C_1\left[1- e^{2n\pi b/a}\right] - \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)\right\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0$$

Por lo tanto debe cumplirse que:

$$C_1\left[1- e^{2n\pi b/a}\right] - \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) = 0$$

de donde obtenemos:

$$C_1 = -\frac{e^{-n\pi b/a}\operatorname{sn}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)}{\sqrt{2a}\operatorname{senh}(n\pi b/a)}$$

por lo que g nos queda finalmente:

$$g(x|\xi;y|\eta) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-n\pi b/a}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)}{\sqrt{2a}\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\left\{e^{n\pi y/a} - e^{2n\pi b/a}e^{-n\pi y/a}\right\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\boxed{g(x|\xi;y|\eta) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\operatorname{senh}\left[\frac{n\pi(b-y)}{a}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}$$

En la expresión dada para G en el inciso b), calcularemos la derivada parcial:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = -\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)} \operatorname{senh}\left[\frac{m\pi(b-y)}{a}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cosh\left[\frac{m\pi\eta}{a}\right]$$

$$(y > \eta)$$

Luego:

$$-\frac{\partial G}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} = \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)} \operatorname{senh}\left[\frac{m\pi(b-y)}{a}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

$$(y > \eta)$$

Por lo tanto:

$$g = \frac{-\partial G(x|\xi;y|\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta = 0}$$

y de acuerdo a esto podemos considerar a g nuestra Función de Green para condiciones frontera en este problema (Comparar con las dos últimas fórmulas del ejemplo 2 en la página 13).

EJEMPLO 10 :

Se quiere obtener una solución para la ecuación de Poisson bidimensional, para el semiplano $0 < x < +\infty$; $-\infty < y < +\infty$, sujeta a la condición frontera $\Psi(0,y) = 0$.

Mostrar que la Función de Green apropiada para este caso puede escribirse en la forma:

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_o) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Ln}\left|\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_o}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_o'}\right|$$

explicar qué es $\mathbf{r}_o'$.

SOLUCION :

$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_o)$ debe cumplir con la ecuación $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_o)$ además de la condición de ser cero en $x = 0$.

La solución para todo el plano xy está dada por :

$$G(x|x_o;y|y_o) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Ln}\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}$$

Que corresponde al caso en que se tiene una fuente puntual unitaria en el punto (x_o,y_o) (ver Parte IV).

Para cumplir la condición de que la Función de Green se anule en $x = 0$, realizaremos una extensión asimétrica de nuestra función definida para todo el plano, sobre el semiplano negativo en x, como se muestra:

$$G(x|x_o;y|y_o) = \frac{1}{2\pi}\,Ln\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} - \frac{1}{2\pi}\,Ln\sqrt{(x+x_o)^2 + (y-y_o)^2}$$

$$G(x|x_o;y|y_o) = Ln\,\frac{\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}}{\sqrt{(x+x_o)^2 + (y-y_o)^2}}$$

Que podemos expresar también como :

$$\boxed{G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_o) = \frac{1}{2\pi}\,Ln\left|\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_o}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_o'}\right|}$$

Donde $\mathbf{r}_o$ es la posición donde se encuentra colocada la fuente puntual unitaria "real" , mientras que $\mathbf{r}_o'$ es la posición en la que se encuentra colocada la fuente puntual unitaria "imaginaria". Estos dos vectores nos representan los puntos : $\mathbf{r}_o = (x_o,y_o)$ y $\mathbf{r}_o' = (-x_o,y_o)$.

EJEMPLO 11 :

Usar los eigenvalores y eigenfunciones de la membrana circular vibrante y fija en su perímetro para desarrollar una fórmula bilineal en coordenadas polares para la Función de Green que satisface a la ecuación:

$$\nabla^2 G(r|r_o;\theta|\theta_o) = \frac{1}{r}\,\delta(r-r_o)\,\delta(\theta-\theta_o)$$

además de la condición frontera $G(a|r_o;\theta|\theta_o)$.

SOLUCION :

Primeramente hagamos una expansión de la función de Green que buscamos, en términos de las eigenfunciones del problema de la membrana vibrante. Esto nos da:

$$G(r|r_o;\theta|\theta_o) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{A_{mn}(r_o,\theta_o)\,J_{mn}(\alpha_{mn}r/a)}{aJ_{m+1}(\alpha_{mn})}\cos(m\theta)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{B_{mn}(r_o,\theta_o)\,J_{mn}(\alpha_{mn}r/a)}{aJ_{m+1}(\alpha_{mn})}\,\mathrm{sen}(m\theta)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{A_{on}(r_o,\theta_o)\,J_{on}(\alpha_{on}r/a)}{aJ_{1n}(\alpha_{on})}$$

El laplaciano nos queda :

$$\nabla^2 G = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_{mn}\cos(m\theta)}{aJ_{m+1}(\alpha_{mn})} \left\{\left[\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2 J_{mn}'' + \frac{1}{r}\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right) J_{mn}' - \frac{m^2}{r^2} J_{mn}\right]\right\}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{B_{mn}\operatorname{sen}(m\theta)}{aJ_{m+1}(\alpha_{mn})} \left\{\left[\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2 J_{mn}'' + \frac{1}{r}\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right) J_{mn}' - \frac{m^2}{r^2} J_{mn}\right]\right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{A_{on}}{aJ_1(\alpha_{on})} \left\{\left[\left(\frac{\alpha_{on}}{a}\right)^2 J_{on}'' + \frac{1}{r}\left(\frac{\alpha_{on}}{a}\right) J_{on}'\right]\right\}$$

Por otra parte :

$$\frac{1}{r}\,\delta(r-r_o)\,\delta(\theta-\theta_o) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{mn}(\alpha_{mn}r_o/a)\cos m\theta_o}{\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} J_{mn}(\alpha_{mn}r/a)\cos(m\theta)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{mn}(\alpha_{mn}r_o/a)\operatorname{sen} m\theta_o}{\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} J_{mn}(\alpha_{mn}r/a)\operatorname{sen}(m\theta)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{on}(\alpha_{on}r_o/a)}{a^2 [J_1(\alpha_{on})]^2} J_{on}(\alpha_{on}r/a)$$

Igualando estas expresiones, agrupando series con términos semejantes, simplificando y despejando , obtenemos:

$$A_{mn} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{aJ_{mn}(\alpha_{mn}r_o/a)\cos m\theta_o}{(\alpha_{mn})^2 J_{m+1}(\alpha_{mn})}$$

También:

$$B_{mn} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{aJ_{mn}(\alpha_{mn}r_o/a)\,\mathrm{sen}\,m\theta_o}{(\alpha_{mn})^2 J_{m+1}(\alpha_{mn})}$$

$$A_{on} = -\frac{2a\sqrt{\pi}\;J_o(\alpha_{on}r_o/a)}{(\alpha_{on})^2 J_1(\alpha_{on})}$$

La expresión buscada para $G(r|r_o;\theta|\theta_o)$ nos queda entonces de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{aligned} G(r|r_o;\theta|\theta_o) = &-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\;J_{mn}(\alpha_{mn}r_o/a)J_{mn}(\alpha_{mn}r/a)}{\pi(\alpha_{mn})^2[J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2}\cos m(\theta-\theta_o) \\ &-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\;J_{on}(\alpha_{on}r_o/a)J_{on}(\alpha_{on}r/a)}{(\alpha_{on})^2[J_1(\alpha_{mn})]^2}\end{aligned}}$$

Esta expresión la podemos interpretar como la deflexión estática sufrida por la membrana circular, fija en su perímetro, debida a la acción de una carga unitaria aplicada en el punto cuyas coordenadas polares son : $(r_o,\ \theta_o)$.

EJEMPLO 14:

Demostrar que, dependiendo de la técnica utilizada, la Función de Green que satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$$

para el intervalo : $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$, junto con las condiciones frontera :

$$G(0|\xi;y|\eta) = G(x|\xi;0|\eta) = G(x|\xi;b|\eta) = 0$$

y con la condición de ser finita cuando x tienda a infinito; puede ser obtenida de las tres siguientes formas :

a).-

$$G = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) e^{-(n\pi\xi/b)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) & (x < \xi) \\ -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) e^{-(n\pi x/b)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) & (x > \xi) \end{cases}$$

b).-

$$G = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}k\xi \ \operatorname{sen}kx \ \operatorname{senh}ky \ \operatorname{senh}k(b-\eta)}{k \operatorname{senh}kb} dk & (y < \eta) \\ \dfrac{-2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}k\xi \ \operatorname{sen}kx \ \operatorname{senh}k\eta \ \operatorname{senh}k(b-y)}{k \operatorname{senh}kb} dk & (y > \eta) \end{cases}$$

c).-

$$G = -\frac{4}{\pi b}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)\operatorname{sen}kx\ \operatorname{sen}k\xi}{k^2+\frac{n^2\pi^2}{b^2}}dk$$

También mostrar que la integración sobre k reduce la expresión de c) en la de a).

SOLUCION:

a).- Representando a G mediante una serie de Fourier de la forma :

$$G(x|\xi;y|\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x|\xi;\eta)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

que cumple con las condiciones de anularse en $y = 0$ y $y = b$, tenemos que el Laplaciano de G es entonces:

$$\nabla^2 G(x|\xi;y|\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{d^2A_n}{dx^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}A_n\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Por otra parte :

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{b}\delta(x-\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación para G y ordenando términos, llegamos a la siguiente ecuación diferencial para A_n :

$$\frac{d^2A_n}{dx^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}A_n = \frac{2}{b}\delta(x-\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)$$

Cuya solución es :

$$A_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi}\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi\eta}{b}\right)\operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi x}{b}\right)e^{-(n\pi\xi/b)} & (x < \xi) \\[2ex] -\dfrac{2}{n\pi}\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi\eta}{b}\right)\operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi\xi}{b}\right)e^{-(n\pi x/b)} & (x > \xi) \end{cases}$$

Por lo que G nos queda *finalmente*:

$$\boxed{G = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{n\pi}\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi\eta}{b}\right)e^{-(n\pi\xi/b)}\operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi x}{b}\right) & (x < \xi) \\[2ex] -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{n\pi}\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi\eta}{b}\right)e^{-(n\pi x/b)}\operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi\xi}{b}\right) & (x > \xi) \end{cases}}$$

b).- Ahora utilizaremos una representación para G en términos de una Transformada Senoidal de Fourier en x :

$$G(x|\xi;y|\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} G_s(k|\xi;y|\eta)\operatorname{sen}kx\ dk$$

donde G_s es la Transformada Senoidal de Fourier de G. El laplaciano nos queda:

$$\nabla^2 G(x|\xi;y|\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\frac{d^2G_s}{dy^2} - k^2G_s\right]\operatorname{sen}kx\ dk$$

Para la doble delta tenemos:

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \delta(y-\eta)\,\mathrm{sen}k\xi\,\mathrm{sen}kx\;dk$$

Sustituyendo en la ecuación para G y ordenando, obtenemos la siguiente ecuación para G_s:

$$\frac{d^2G_s}{dy^2} - k^2G_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\delta(y-\eta)\,\mathrm{sen}k\xi$$

cuya solución es de la forma :

$$G_s = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\mathrm{sen}k\xi\ \mathrm{senh}ky\ \mathrm{senh}k(b-\eta)}{k\,\mathrm{senh}kb} & (y < \eta) \\[2ex] -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\mathrm{sen}k\xi\ \mathrm{senh}k\eta\ \mathrm{senh}k(b-y)}{k\,\mathrm{senh}kb} & (y > \eta) \end{cases}$$

Por lo que G nos quedará:

$$\boxed{G = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{sen}k\xi\ \mathrm{sen}kx\ \mathrm{senh}ky\ \mathrm{senh}k(b-\eta)}{k\,\mathrm{senh}kb}dk & (y < \eta) \\[2ex] \dfrac{-2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{sen}k\xi\ \mathrm{sen}kx\ \mathrm{senh}k\eta\ \mathrm{senh}k(b-y)}{k\,\mathrm{senh}kb}dk & (y > \eta) \end{cases}}$$

c).-Por otra parte, las eigenfunciones y eigenvalores del presente caso son de la forma:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad \text{con} \qquad -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad n = 1,2,3,\ldots$$

y $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}kx \qquad \text{con } -k^2 > 0$$

por esta razón, buscaremos una Función de Green que tenga la siguiente forma:

$$G(x|\xi;y|\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi b}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} A_n(\xi,\eta)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{senkx}\;dk$$

El laplaciano nos queda entonces:

$$\nabla^2 G(x|\xi;y|\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi b}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[-\frac{n^2\pi}{b^2} - k^2\right]A_n(\xi,\eta)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{senkx}\;dk$$

Mientras que para la delta nos queda:

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) = \frac{4}{\pi b}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)\mathrm{senk}\xi\;\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{senkx}\;dk$$

Sustituyendo en la ecuación de la G , nos queda después de ordenar, simplificar, despejar :

$$A_n = - \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \operatorname{sen} k\xi}{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

Por lo que G nos queda de la siguiente forma:

$$\boxed{G = - \frac{4}{\pi b} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \operatorname{sen} kx \ \operatorname{sen} k\xi}{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} dk}$$

Ahora , esta última expresión la podemos también escribir como:

$$G = - \frac{4}{\pi b} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} k\xi \ \operatorname{sen} kx}{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} dk \right\}$$

Consideremos la integral:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} k\xi \ \operatorname{sen} kx}{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} dk = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos k(x-\xi)}{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} dk - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos k(x+\xi)}{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} dk$$

que es equivalente a :

$$I = \frac{b}{4n} e^{-n\pi(x-\xi)/b} - \frac{b}{4n} e^{-n\pi(x+\xi)/b}$$

ya que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega \; d\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-a} \;, \quad (a > 0)$$

Entonces tenemos que :

$$I = \begin{cases} \dfrac{b}{2n} e^{-n\pi\xi/b} \operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi x}{b}\right) & \text{para} \quad x < \xi \\[2ex] \dfrac{b}{2n} e^{-n\pi x/b} \operatorname{senh}\left(\dfrac{n\pi \xi}{b}\right) & \text{para} \quad x > \xi \end{cases}$$

y sustituyendo este resultado en la expresión para G, llegamos a la expresión obtenida en a), tal como se pedía.

CONCLUSION :

En las secciones anteriores, se han tratado algunos de los aspectos relacionados con las Funciones de Green, algunas de sus propiedades , métodos de obtención y aplicaciones.

En lo referente a las propiedades, no se hizo una demostración rigurosa y detallada de ellas, pues tal no era el objetivo del presente escrito. Tales propiedades se pueden demostrar rigurosamente y sobre tal tema se pueden consultar diversos textos. Lo que se pretendía en este escrito, era dar una idea de cómo se utilizan las Funciones de Green para resolver problemas de valores en la frontera , tal como se mencionó al principio del mismo. Tal objetivo, se intentó alcanzar mediante la presentación de ejemplos consistentes en problemas con sus respectivas soluciones ; y aunque el número de tales ejemplos es reducido en este caso, por lo menos dan una idea de la línea a seguir en la aplicación de las Funciones de Green, sobre todo en los casos de problemas de valores en la frontera en los que se involucran ecuaciones del tipo de Sturm-Liouville .

Por lo tanto, no considero mal empleado el tiempo dedicado a estudiar el tema, resolver problemas y preparar el presente escrito, el cual leído con calma, sobre todo en la parte de las aplicaciones , da una aceptable idea de cómo usar las Funciones de Green. No escribí un resumen de lo que es digamos, el caminito a seguir en cada caso según las condiciones del problema, pues tal cosa me recuerda mucho los recetarios de cocina ; en cambio, se hizo una presentación de ejemplos en los que se muestran algunos de los procedimientos posibles, sin querer decir que los procedimientos aquí utilizados sean los únicos válidos. La inventiva es válida, pero apoyada en bases firmes.