

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS



MODELOS DE DAÑO ACUMULADO  
BASADOS EN CADENAS DE MARKOV.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

FRANCISCO JAVIER PEREZ ARREDONDO

MONTERREY, N. L.

MAYO DE 1991

L.M.

88

TL

QA274

7

.P47

1991

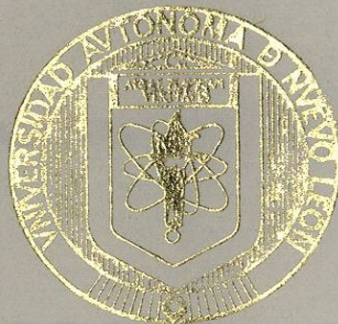
c.1



1080172973

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS



MODELOS DE DAÑO ACUMULADO  
BASADOS EN CADENAS DE MARKOV

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

FRANCISCO JAVIER PEREZ ARREDONDO

MONTERREY, N. L.

MAYO DE 1991

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO - MATEMATICAS

MODELOS DE DAÑO ACUMULADO BASADOS EN CADENAS DE MARKOV

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTA:

FRANCISCO JAVIER PEREZ ARREDONDO

MONTERREY, N. L.

MAYO 1991

## INDICE

<b>CAPITULO 1</b>	<b>DESCRIPCION DEL MODELO DE DAÑO ACUMULADO</b>	<b>1</b>
1.1	INTRODUCCIÓN	1
1.2	PROCESOS ESTOCÁSTICOS	2
1.3	CADENAS DE MARKOV	5
1.4	MODELOS DE DAÑO ACUMULADO	10
1.5	EL COMPORTAMIENTO DE LOS MODELOS: UNA SIMULACIÓN	13
<b>CAPITULO 2</b>	<b>LA FUNCION GENERATRIZ DE PROBABILIDADES</b>	<b>26</b>
2.1	DEFINICIÓN Y PROPIEDADES BÁSICAS	26
2.2	LA FUNCIÓN GENERATRIZ DE PROBABILIDADES EMPÍRICA	30
2.3	LA FUNCIÓN GENERATRIZ DE PROBABILIDADES PARA ALGUNOS MODELOS DE DAÑO ACUMULADO	33
2.4	GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES GENERATRICES DE PROBABILIDADES	35
<b>CAPITULO 3</b>	<b>ESTIMACION DE PARAMETROS</b>	<b>50</b>
3.1	PROPIEDADES TEÓRICAS DEL MODELO	50
3.2	EL MÉTODO DE MOMENTOS	54
3.3	EL MÉTODO DE LA FGP	55
3.4	ESTUDIO DE MONTE CARLO	56
<b>CAPITULO 4</b>	<b>CONCLUSIONES Y COMENTARIOS</b>	<b>65</b>
4.1	OBSERVACIONES GENERALES	65
4.2	RECOMENDACIONES PRACTICAS	70
4.3	CONCEPTOS NO ABARCADOS EN ESTE TRABAJO	71
<b>CAPITULO 5</b>	<b>UNA APLICACION A DATOS DE INGENIERIA</b>	<b>72</b>
<b>REFERENCIAS</b>		<b>80</b>

# CAPITULO 1

## MODELOS DE DAÑO ACUMULADO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Los trabajos acerca de los modelos de daño acumulado con un enfoque probabilístico se han contemplado desde hace algunos años. Recientemente Bogdanoff & Kozin [1985] realizaron un trabajo en el que se reseña la metodología para estos tipos de modelos. En particular, se utilizan cadenas de Markov para modelar problemas de este tipo; vease la referencia principal de este trabajo, [3].

En el presente trabajo se analiza un modelo de daño acumulado basado en cadenas de Markov, el cual versa sobre la siguiente situación: Se supone que se tiene una cierta pieza que se reemplaza cada vez que ya no es útil por una nueva. La variable de interés es el tiempo de vida de la pieza, es decir, más que el daño, se mide el tiempo transcurrido antes de que tenga que ser sustituida. El conocimiento del comportamiento estocástico de esta variable permite diseñar políticas de reemplazo y mantenimiento, comparar distintos tipos de componentes, evaluar riesgos, etc.

Uno de los objetivos de este trabajo es modelar el comportamiento de esta variable, que en muchos de los casos es una variable aleatoria discreta. Otro objetivo, una vez identificado un conjunto de datos de este tipo, es determinar los parámetros del modelo correspondiente, es decir, la estimación del modelo. Un método sugerido en la literatura para tal efecto lo constituye el método de momentos, el cual ciertamente es un método consistente. En este trabajo se propone un método alternativo;

específicamente se propone el uso de la función generatriz de probabilidades empírica como una herramienta para estimar sus parámetros. En el presente trabajo, también se comparan entre sí ambos métodos de estimación mencionados, con el objeto de obtener lineamientos de sus ventajas y desventajas.

Este trabajo está estructurado de la manera siguiente. En este Capítulo 1 se presentan primero los conceptos preliminares sobre procesos estocásticos y se describe la forma del modelo de daño acumulado que será estudiado en forma posterior. Se consideran algunos ejemplos con datos simulados con el objeto de ilustrar los efectos de los diversos parámetros sobre la naturaleza de los tiempos de vida. El Capítulo 2 introduce las funciones generatrices de probabilidad tanto teórica, empírica y las propias del modelo, así como sus propiedades primordiales. Se calculan explícitamente las funciones generatrices de probabilidad para un número de modelos de daño acumulado y se ilustran gráficamente. Por otra parte, en el Capítulo 3, se dan relaciones importantes acerca del modelo y se describen los métodos para estimar parámetros. En el Capítulo 4 se obtienen conclusiones generales acerca del trabajo y de un estudio de Monte Carlo que se diseñó para hacer comparaciones entre los estimadores. Por último, en el Capítulo 5 se analiza un problema real de datos proporcionados por el Departamento de Mantenimiento de la empresa Aeroméxico.

## 1.2 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Antes de poder describir lo que son los modelos de daño acumulado, se necesitan algunos conceptos sobre probabilidad, en especial lo referente a procesos estocásticos; es por eso que este capítulo se inicia estableciendo definiciones que se requieren para el desarrollo del modelo. Existe una gran



bibliografía al respecto, véanse por ejemplo las referencias [1] y [8].

Cuando se habla informalmente acerca de procesos estocásticos se dice, para referirse a ellos, que son procesos aleatorios que "van cambiando conforme transcurre el tiempo". Para un conocimiento más formal de lo que éstos son, se tiene la siguiente definición.

**DEFINICION 1.1:** Un proceso estocástico (PE) es una familia de variables aleatorias  $X_t$ , donde  $t$  es un parámetro que toma valores en un conjunto de índices  $T$ .

Comúnmente, el índice  $t$  corresponde a valores discretos de tiempo, y entonces el conjunto de índices es  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Los procesos estocásticos se distinguen por su *espacio de estados* o rango de los posibles valores de  $X_t$ , por el conjunto de índices  $T$  y por las relaciones entre las variables aleatorias  $X_t$ .

Como se puede observar con respecto a la definición y lo que se mencionó al principio, se cuenta con un conjunto de parámetros que generalmente se interpreta como el tiempo; con respecto a aquello que cambia, se interpreta como pasar de un estado a otro.

Existen diferentes tipos de procesos estocásticos, pero para este trabajo interesan principalmente los llamados procesos de Markov que a continuación se definen.

**DEFINICION 1.2:** Un proceso de Markov es un proceso estocástico  $\{X_t\}$  con espacio de índices en los números reales y con la propiedad que, dado el valor de  $X_t$ , los valores de  $X_s$  para  $s > t$  no son influenciados por los valores de  $X_u$  para  $u < t$ .

En el caso en que el conjunto de índices es  $T = \{0, 1, \dots\}$  y el espacio de estados es  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , lo que dice esta definición formalmente, es que se cumple la siguiente propiedad:

$$\Pr\langle X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i \rangle = \Pr\langle X_{n+1} = j | X_n = i \rangle$$

para toda  $n$  y todo estado  $i, j$ . Esta propiedad se conoce como la *propiedad de Markov*.

A continuación se da una serie de ejemplos de procesos estocásticos, donde se varía su espacio de estados y el tipo de parámetro.

### 1.2.1 EJEMPLOS DE DISTINTOS TIPOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Se obtienen diferentes tipos de procesos estocásticos, clasificados al combinar los diferentes tipos de espacios de estados, discretos y continuos, y del espacio de parámetros que también pueden ser discretos y continuos. Entonces resultan las cuatro combinaciones siguientes, donde se dan ejemplos de cada uno de ellos.

- (a) PE con espacio de estados discretos y parámetro discreto.
  - \* Preferencias de consumo (marca A, marca B, marca C), observadas durante los días de un mes.
  - \* Número de artículos defectuosos en una muestra, con el número de artículos inspeccionados como parámetro de índices.
  
- (b) P.E. con parámetro continuo y espacio de estados discreto.
  - \* Número de estudiantes esperando el autobús en algún momento del día.

(c) P.E. con parámetro discreto y espacio de estados continuo.

\* Tiempo acumulado que esperan  $n$  estudiantes que llegan a la parada del autobús.

(d) P.E. con parámetro y espacio de estados continuo.

\* Volumen de una presa observado durante un intervalo de tiempo.

De los diversos tipos de PE interesa de manera particular uno de ellos, el cual recibe un nombre especial y que además requiere que cumpla con la propiedad de Markov. A continuación se describen estos procesos y cómo se identifican.

### 1.3 CADENAS DE MARKOV

También existe una amplia teoría para este tema, y se pueden consultar las referencias [5] y [8]. Aquí únicamente se describe la herramienta necesaria para hablar con mayor soltura acerca de cierta clase de modelos de daño acumulado que se describirán en breve.

**DEFINICION 1.3:** Una cadena de Markov (CMD) es un proceso de Markov con parámetro discreto y espacio de estados discreto.

Es conveniente asociar el espacio de estados de una cadena de Markov con los números enteros no negativos, esto es el espacio de estados es  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

La probabilidad condicional de que  $X_{n+1}$  pase del estado  $j$  dado que  $X_n$  se encuentra en el estado  $i$ , se llama la *probabilidad de transición de un paso* y se define como

$$P_{ij}^{n,n+1} = \Pr (X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Esta notación enfatiza que en general las probabilidades de transición son funciones no solo del estado inicial y final, sino también del tiempo de transición. Cuando las probabilidades de transición de un paso son independientes del tiempo  $n$ , se dice entonces que la cadena de Markov tiene *probabilidades de transición estacionarias* o que se tiene una *cadena de Markov estacionaria*.

En este caso la fórmula anterior puede escribirse

$$P_{ij}^{n,n+1} = p_{ij},$$

donde  $P_{ij}$  es la probabilidad condicional que el valor del estado en una transición pase de  $i$  a  $j$  en un evento.

Usualmente se arreglan estos valores en una matriz y se le conoce como la matriz de Markov o *matriz de probabilidades de transición* (MPT) del proceso. En general tendrá la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & p_{i4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Para  $i=1,2,\dots$ , la fila  $(i)$  de  $P = |P_{ij}|$  es la distribución de probabilidad de los valores de  $X_{n+1}$  bajo la condición de que  $X_n = i$ .

Si el número de estados es finito, entonces  $P$  es una matriz cuadrada finita cuyo orden es igual al número de estados.

Claramente las cantidades  $P_{ij}$  satisfacen las condiciones:

$$(i) p_{ij} \geq 0 \text{ para } i, j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(ii) \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Una cadena de Markov está caracterizada completamente por su matriz de probabilidades de transición (MPT) y por su distribución inicial en el tiempo 0. En el análisis de una cadena de Markov interesa principalmente el cálculo de las probabilidades de las posibles realizaciones del proceso. La base para dichos cálculos es la MPT de  $n$  pasos  $P^{(n)} = |P_{ij}^{(n)}|$ . Aquí  $P_{ij}^{(n)}$  denota la probabilidad que el proceso vaya del estado  $i$  al estado  $j$  en  $n$  transiciones. Formalmente,

$$P_{ij}^{(n)} = \Pr \{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}.$$

Con esto, se está tratando sólo con procesos homogéneos que tienen probabilidades de transición estacionarias; de otra manera el lado izquierdo de la relación anterior también dependería de  $m$ .

La propiedad de Markov permite expresar la relación anterior en términos de  $|P_{ij}|$  como se expone en el siguiente teorema.

**TEOREMA 1.1:** Las probabilidades de transición de  $n$  pasos de una cadena de Markov satisfacen

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)},$$

donde se define

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Antes de la demostración de este teorema, se nota que de la teoría de matrices puede reconocerse a la relación que se demostrará. En efecto, se trata de la fórmula para la multiplicación de matrices, esto es,

$$P^{(n)} = P \times P^{(n-1)}.$$

Por inducción en esta fórmula, se obtiene

$$P^{(n)} = P^n ;$$

en otras palabras, las probabilidades de transición de  $n$  pasos  $P_{ij}^{(n)}$  son las entradas en la matriz  $P^n$ , la  $n$ -ésima potencia de  $P$ .

**Demostración:**

Esta procede vía un análisis del primer paso, un análisis de la posible transición en el primer paso, seguido por una aplicación de la propiedad de Markov. El evento de ir del estado  $i$  al estado  $j$  en  $n$  transiciones puede ser realizarse en caminos mutuamente exclusivos de ir a un estado intermedio  $k$ , ( $k=0,1,2,\dots$ ), en la primera transición, y entonces ir del estado  $k$  al estado  $j$  en las restantes  $n-1$  transiciones. Porque de la propiedad de Markov, la probabilidad de la segunda transición es  $P_{kj}^{(n-1)}$ , y que la primera es claramente  $P_{ik}$ . Si se usa la ley de la probabilidad total, se sigue la relación. Los pasos son

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= \Pr \langle X_n=j | X_0=i \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr \langle X_n=j, X_1=k | X_0=i \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr \langle X_1=k | X_0=i \rangle \Pr \langle X_n=j | X_0=i, X_1=k \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Hasta ahora se discutieron las cadenas de Markov, incluyendo su espacio de estados. Sin embargo no se ha visto cómo se

clasifican éstos. También existe teoría extensa acerca de esto y para ello deben verse también las referencias [5] y [8].

### 1.3.1 CLASIFICACIÓN DE ESTADOS

Antes de pasar a definir los dos tipos de estados que aquí se necesitan, se da la siguiente notación, y en base a ésta se definen.

Notación:  $f_{jk}^{(n)}$  representa la probabilidad de que en un proceso que parte del estado  $j$ , la primera entrada al estado  $k$  ocurre en el  $n$ -ésimo paso. Se ponen

$$f_{jk}^{(0)} = 0$$

y

$$f_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}^{(n)}$$

**DEFINICIÓN 1.4:** Un estado  $j$  es transitivo si  $f_{jj} < 1$ .

Lo que significa esta definición, es que al llegarse a un estado de este tipo existe una probabilidad positiva para eventualmente salir de él y pasar a otro estado.

**DEFINICIÓN 1.5:** Un estado  $k$  es absorbente si y sólo si  $p_{kk} = 1$ .

De esta definición se tiene, que si se cae en este tipo de estado, la probabilidad de salir eventualmente de él es cero.

A pesar de que existen varios otros conceptos que se estudian en la teoría de Cadenas de Markov como lo son por ejemplo las distribuciones estacionarias, las barreras absorbentes, la descomposición de estados, la irreducibilidad de la cadena y ciertas convergencias; no se mencionan aquí por no

ser absolutamente necesarias en lo que sigue (en las referencias [1], [5] y [8] pueden verse con detalles estos temas).

Se procede ahora al tema principal de este trabajo, dado que ya se tiene el material básico para el desarrollo del mismo. Se inicia la siguiente sección con el caso particular de cadenas de Markov en el contexto de modelos de daño acumulado.

#### 1.4 MODELOS DE DAÑO ACUMULADO

Se pretende modelar como caso particular, la duración de una pieza de alguna máquina que sufre daño y que tiene que ser reemplazada después de algún periodo de tiempo. En los modelos de daño acumulado se analiza el daño que experimentan las piezas, debido éste a motivos tales como desgaste, corrosión, fatiga, quiebra, cambios en las propiedades del material, electrólisis, etc. El daño puede ser ocasionado por una acción mecánica, química, etc. Se habla de daño "acumulado" en el sentido de que el desgaste es gradual y la pieza falla tras acumular cierta cantidad de deterioro.

La variable de interés en este trabajo es el tiempo de vida de la pieza; aquí se le llama el *tiempo de falla*, lo cual quiere decir lo siguiente: supóngase que se tiene la pieza anterior, se coloca nueva y se comienza a contar el tiempo a partir de este momento hasta que la pieza falla y requiere ser reemplazada por otra nueva. La variable en muchos de los casos resulta ser una *variable aleatoria discreta*, aunque también puede ser *continua*.

Por otra parte, el concepto de acumulación de daño también es sensato por el siguiente motivo. Pensando nuevamente en una pieza que sufre daño en el transcurso del tiempo, supóngase que en este momento se coloca nueva. Entonces la probabilidad de que



ésta sea reemplazada por otra en este momento es muy pequeña. Sin embargo, si ya transcurrió algún intervalo de tiempo considerable, entonces esa probabilidad de reemplazo es mayor que la anterior; y así sucesivamente las probabilidades de cambio crecen conforme transcurre el tiempo hasta que ocurre el reemplazo.

En la Sección 1.2 se definieron las cadenas de Markov (CMD). Ahora se consideran únicamente aquellas que son finitas y estacionarias, las cuales tienen asociada una *matriz de probabilidades de transición* (MPT) de dimensión finita, y cuyos estados son de los tipos transitivo y absorbente.

Para los modelos de daño se considera una cadena de Markov de "c" estados, de los cuales los primeros "c-1" son transitivos y el estado "c" es absorbente. Por lo que se describió en el párrafo anterior, el estado absorbente corresponde al estado de falla o de reemplazo y los transitivos cuando aún no se llega a la falla.

Un proceso de acumulación de daño se modela de la forma siguiente: se supone que la pieza nueva inicia en el estado 1 y que falla al momento de ingresar al estado c, y que durante la vida útil de la pieza se van recorriendo los distintos estados intermedios.

Si se supone que sólo puede pasarse de un estado de daño al siguiente inmediatamente superior, entonces la forma de la MPT es la siguiente (se suponen c=4 estados) :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $p_i + q_i = 1$ .

En el caso especial en que las  $p_i = p$ , para toda  $1 \leq i < c$ ; se tiene que la MPT se reduce a la forma que sigue (se suponen  $c=4$  estados):

$$P = \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $p + q = 1$ .

Por establecer una nomenclatura, en este trabajo al modelo con el primer tipo de matriz se le denominará el modelo no diagonal y al modelo con el segundo tipo de matriz como el modelo diagonal.

A este modelo genérico de daño acumulado se le denominará Modelo de Daño Acumulado basado en una Cadena de Markov. Nótese que es apropiado sólo cuando las unidades de tiempo son enteras.

Puede interpretarse al tiempo como un número de "ciclos de uso", por ejemplo la unidad de tiempo puede ser un día laboral en el caso de una máquina, un viaje en el caso de un autobús, o un golpe en el caso de una prensa hidráulica.

Cabe mencionar que existen varias generalizaciones posibles a este modelo. Primero, la posibilidad de que pueda saltarse más de un estado a la vez. En este caso la MPT deja de tener ceros en su parte triangular superior y toma una forma más compleja (con un mayor número de parámetros). Por otra parte, puede resultar que la pieza sea instalada ya con un daño a priori, es decir, que la pieza no comience necesariamente en el estado 1, sino en el estado  $j$  con probabilidad  $\Pi_j$ . Finalmente, también puede ocurrir que con probabilidad  $\rho_j$ , la pieza falla en el estado  $j$ . El primer modelo descrito corresponde a  $\Pi_1=1$ ,  $\Pi_2 = \dots = \Pi_c = 0$  y a  $\rho_1 = \dots = \rho_{c-1} = 0$  y  $\rho_c = 1$ . Es éste modelo simplificado el que se

adopta para el desarrollo de este trabajo.

Para un tratamiento más general de modelos de daño acumulado, incluyendo aquellos para tiempos continuos, véase la referencia [3].

### 1.5 NATURALEZA DE LOS MODELOS: UNA SIMULACIÓN

En lo sucesivo se consideran los modelos de daño acumulado basados en cadenas de Markov con MPT diagonal y no diagonal.

Para entender ambos modelos, de una manera práctica e intuitiva, se simularon tiempos de falla que provenían de éstos. Se variaron los parámetros para determinar si los tiempos de falla proporcionan información acerca de la identidad de cada modelo.

Para esto se realizó un programa en lenguaje Pascal para simular tiempos de falla de la manera siguiente (se generan 2000 tiempos de falla):

- (a) Leer una matriz de probabilidades de transición;
  - (b) Se inicia en el estado 1 y continua con:
    - i) Se genera un número aleatorio  $r$  con distribución uniforme en  $(0,1)$  y se cuenta.
    - ii) Compara con el valor de  $p_e$ , donde  $e$  es el estado en el cual se encuentra en ese momento; si  $r > p_e$ , entonces se pasa al siguiente estado, pero si  $r \leq p_e$ , entonces se ejecuta otra vez desde el paso i; y se sigue así hasta llegar al estado  $c$ .
  - (c) El tiempo de falla simulado es igual a la cantidad de números aleatorios generados para llegar a  $c$ .
- Se realizan entonces los pasos a, b y c para el número total de tiempos de falla. Nótese que el paso b(ii) del algoritmo equivale a generar una variable Bernoulli con parámetro  $1-p_e$ .

En cuanto a la selección de las entradas en una MPT no diagonal, se adoptó la siguiente ecuación para definir los valores de la probabilidad de cambio de estado :

$$q_j = \frac{2\alpha}{c} \left( j - \frac{j^2}{2c} \right)$$

para  $j = 1, 2, \dots, c-1$ , donde  $\alpha$  es un valor en  $(0,1)$ , y  $c$  es el número de estados. De aquí se tiene que  $p_j = 1 - q_j$ , y de esta manera puede abarcarse una amplia familia de MPT no diagonales en función de un solo parámetro  $\alpha$ .

El hecho de que la ecuación anotada para  $q_j$  proporciona siempre valores crecientes de  $q_j$  con  $j$ , corresponde al hecho razonable de que entre más vieja es una pieza, mayor es su probabilidad de pasar al siguiente estado de desgaste. En cierto modo, éstas MPT modelan el hecho comúnmente experimentando de que " una pieza vieja se desgasta más rápidamente ".

Primeramente se muestran en las Tablas 1.1 y 1.2 los casos simulados donde los parámetros son el tamaño de la matriz ( $c$ ) y el valor de la MPT ( $P$ ). Se simularon los dos tipos de modelos para detectar si existe diferencia significativa entre ellos desde el punto de vista práctico.

En las Figuras 1.1 a 1.27 se presentan los histogramas de los tiempos de falla para los casos simulados de ambos modelos, en todas sus configuraciones de parámetros.

Los histogramas fueron generados por la subrutina STAT1 del paquete estadístico GEOEAS. En los mismos, aparecen estadísticas descriptivas las cuales serán referenciadas en el Capítulo 3, al discutir las propiedades teóricas del modelo.

Las conclusiones relevantes se harán todas en el Capítulo 4.

TABLA 1.1  
CASOS SIMULADOS DEL MODELO NO DIAGONAL

PARAMETROS			
# de estados c	valor de $\alpha$	probabilidades $P_{i i}$	figs.
3	0.10	0.945    0.912	1
	0.25	0.862    0.778	2
	0.50	0.730    0.560	3
	0.75	0.584    0.334	4
	0.90	0.500    0.200	5
8	0.10	0.977, 0.957, 0.940, 0.925 0.915, 0.907, 0.902	6
	0.20	0.864, 0.814, 0.880, 0.860 0.830, 0.814, 0.804	7
	0.50	0.885, 0.785, 0.700, 0.625 0.575, 0.535, 0.510	8
	0.70	0.839, 0.699, 0.580, 0.475 0.405, 0.349, 0.314	9
	0.90	0.793, 0.613, 0.460, 0.325 0.235, 0.163, 0.118	10
15	0.10	0.988, 0.976, 0.964, 0.954, 0.945 0.936, 0.929, 0.922, 0.916, 0.912 0.908, 0.904, 0.902, 0.901	11
	0.30	0.964, 0.928, 0.882, 0.862, 0.835 0.808, 0.787, 0.766, 0.748, 0.736 0.724, 0.712, 0.708, 0.703	12
	0.50	0.940, 0.880, 0.820, 0.770, 0.725 0.680, 0.645, 0.610, 0.580, 0.560 0.540, 0.520, 0.510, 0.505	13

TABLA 1.1  
CONTINUACIÓN

15	0.70	0.916, 0.832, 0.748, 0.678, 0.615 0.552, 0.503, 0.454, 0.412, 0.384 0.356, 0.328, 0.314, 0.307	14
	0.90	0.892, 0.784, 0.646, 0.586, 0.505 0.424, 0.361, 0.298, 0.244, 0.208 0.172, 0.136, 0.118, 0.109	15

TABLA 1.2  
CASOS SIMULADOS DEL MODELO DIAGONAL

PARAMETROS		
# de estados c	Valor de la probabilidad p	figs.
3	0.10, 0.25	16 17
	0.50, 0.75	18 19
8	0.10, 0.25	20 21
	0.50, 0.75	22 23
15	0.10, 0.25	24 25
	0.50, 0.75	26 27

# MODELOS NO DIAGONALES

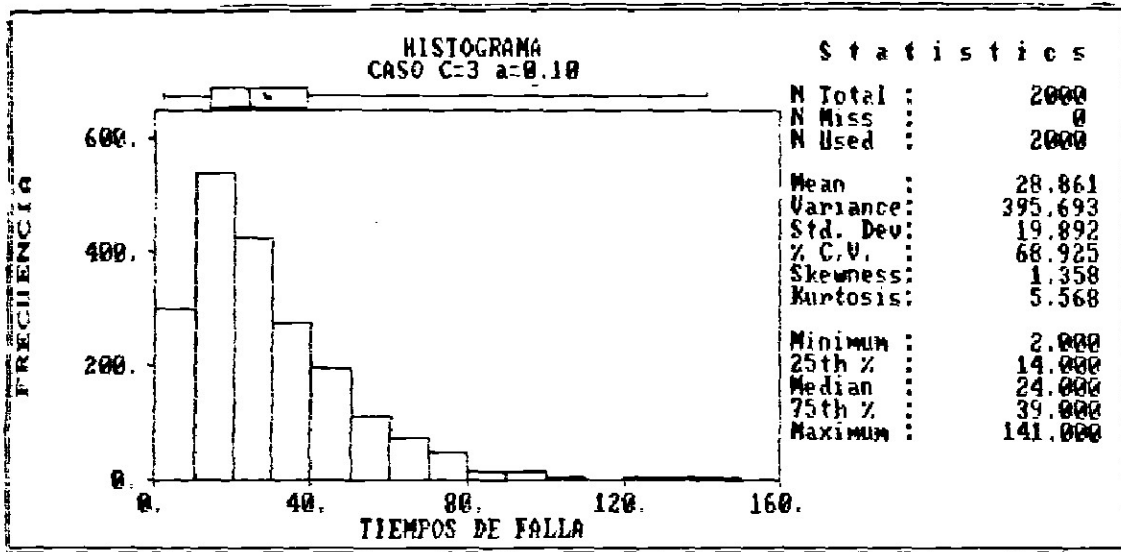


FIG. 1

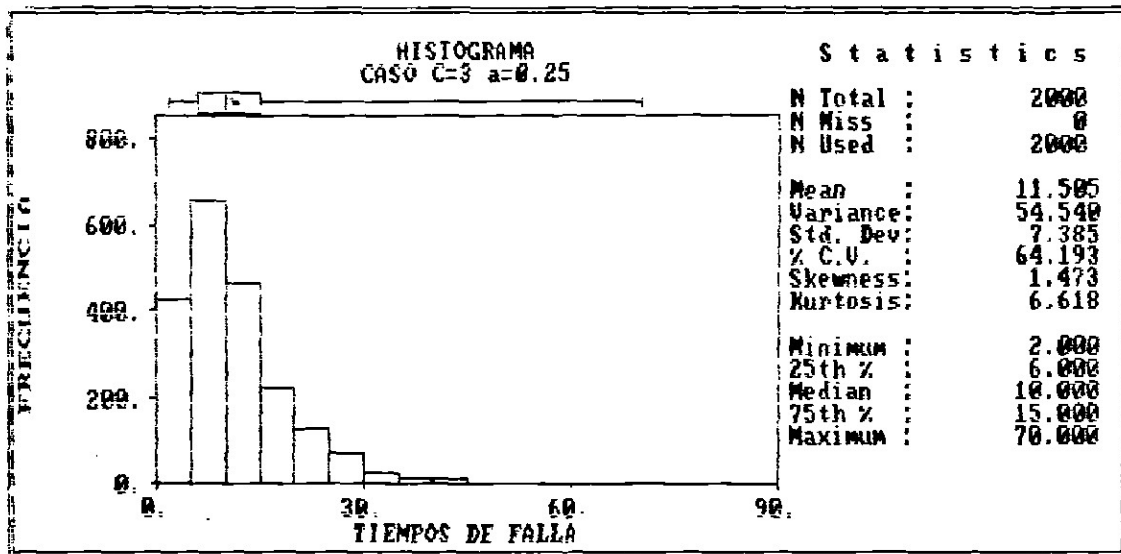


FIG. 2

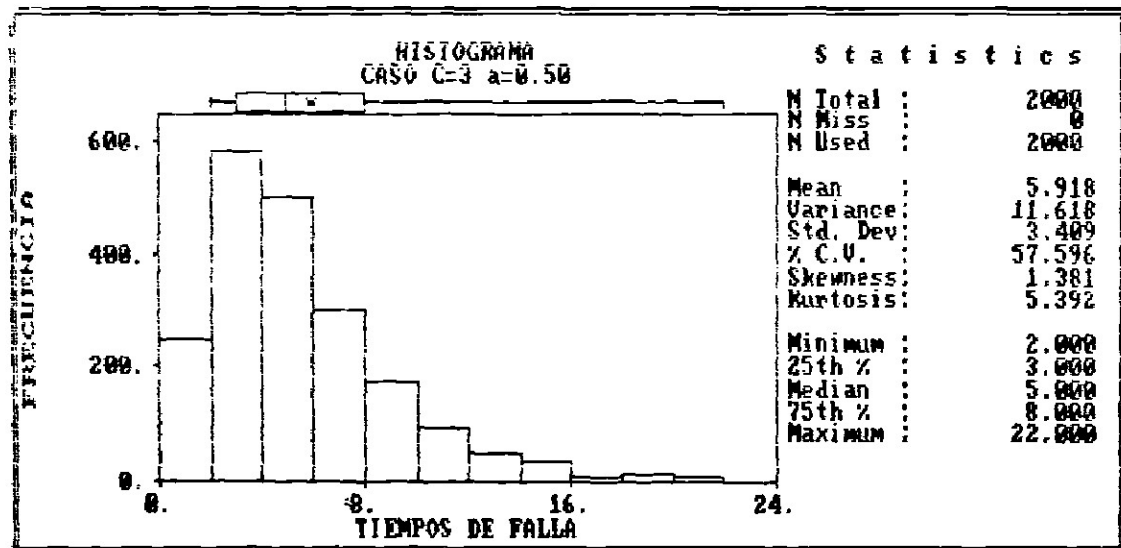


FIG. 3

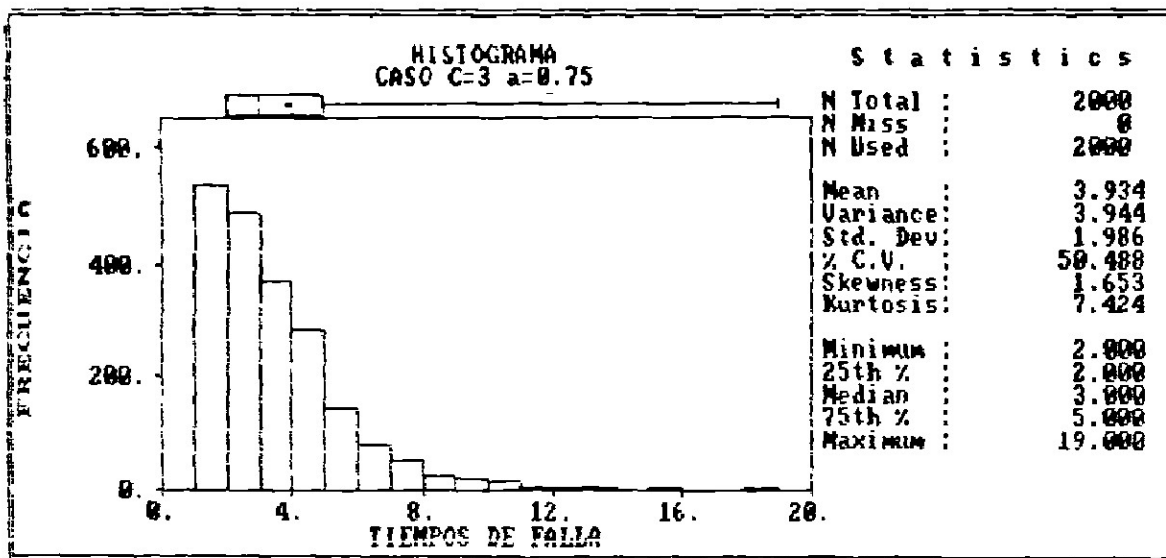


Fig. 4.

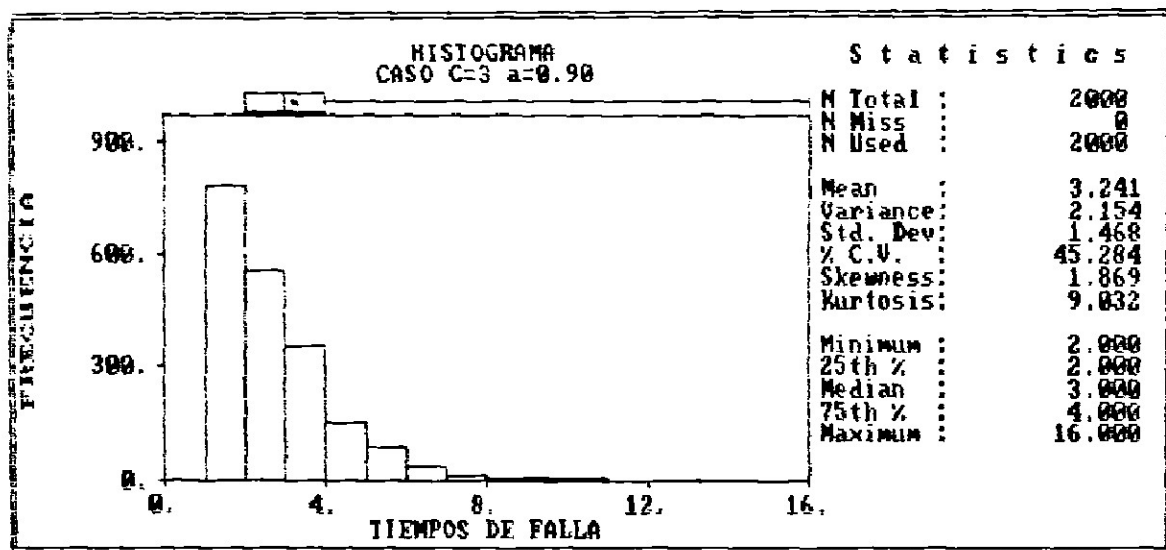


Fig. 5

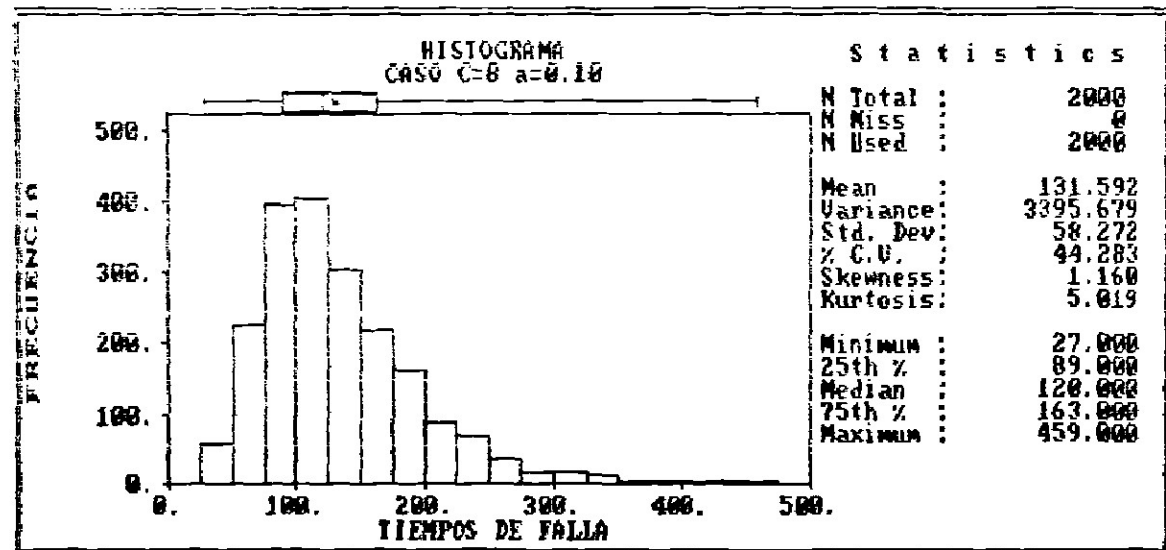


Fig. 6



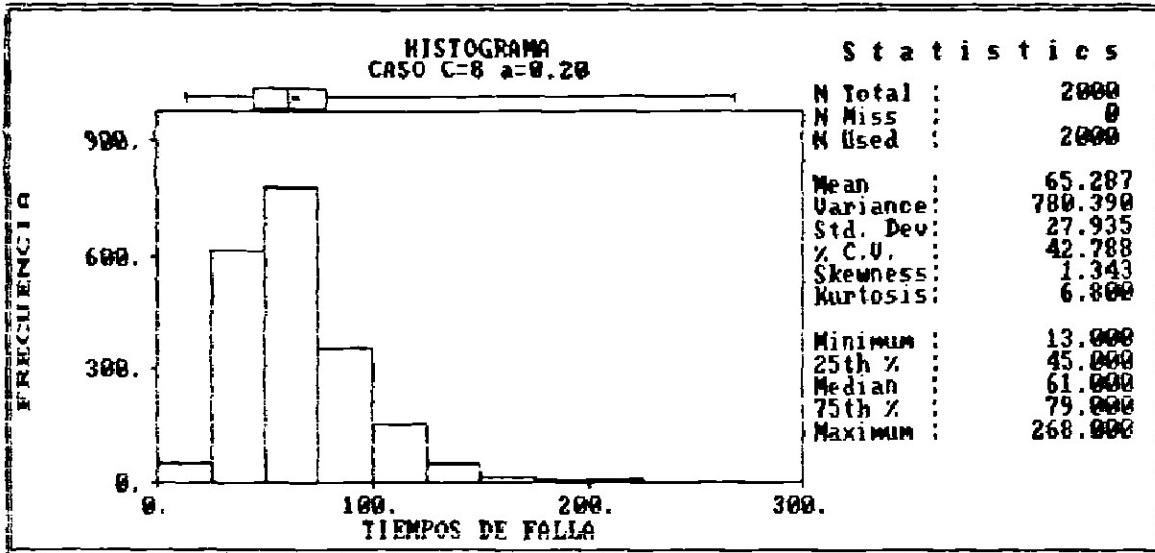


FIG. 7

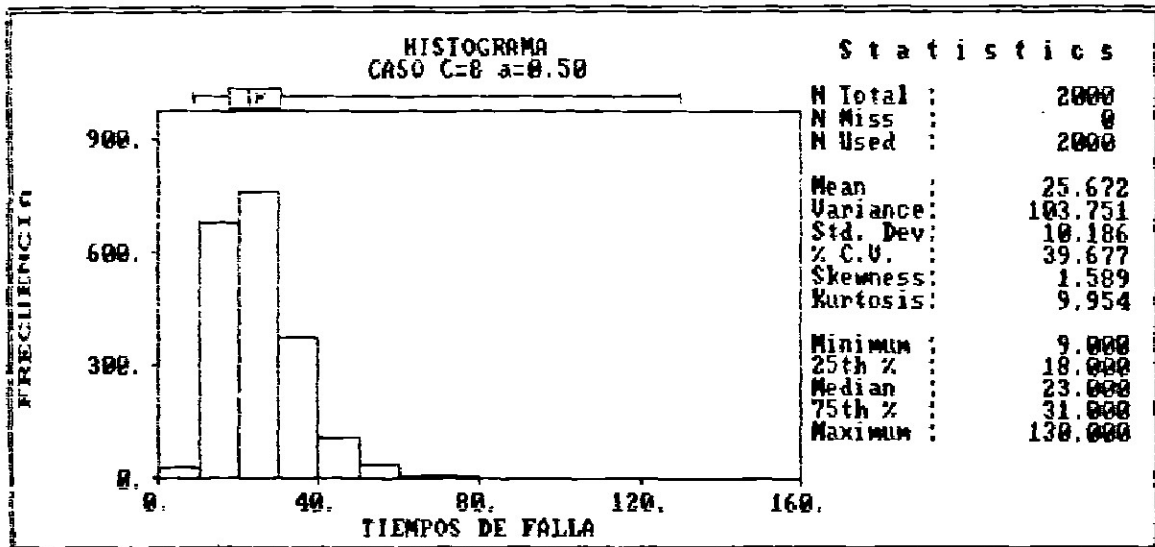


FIG. 8

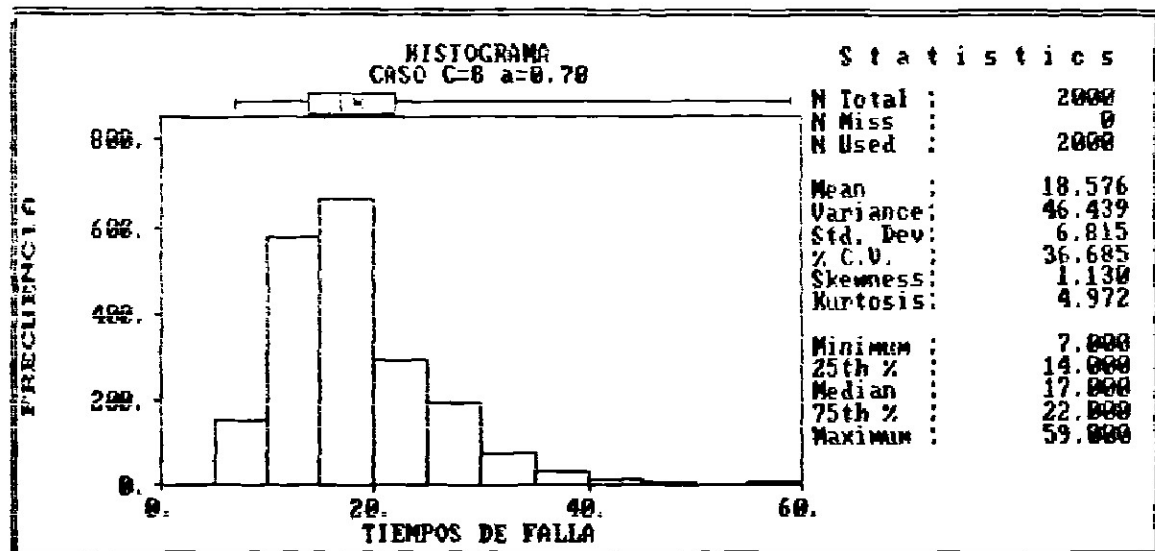


FIG. 9

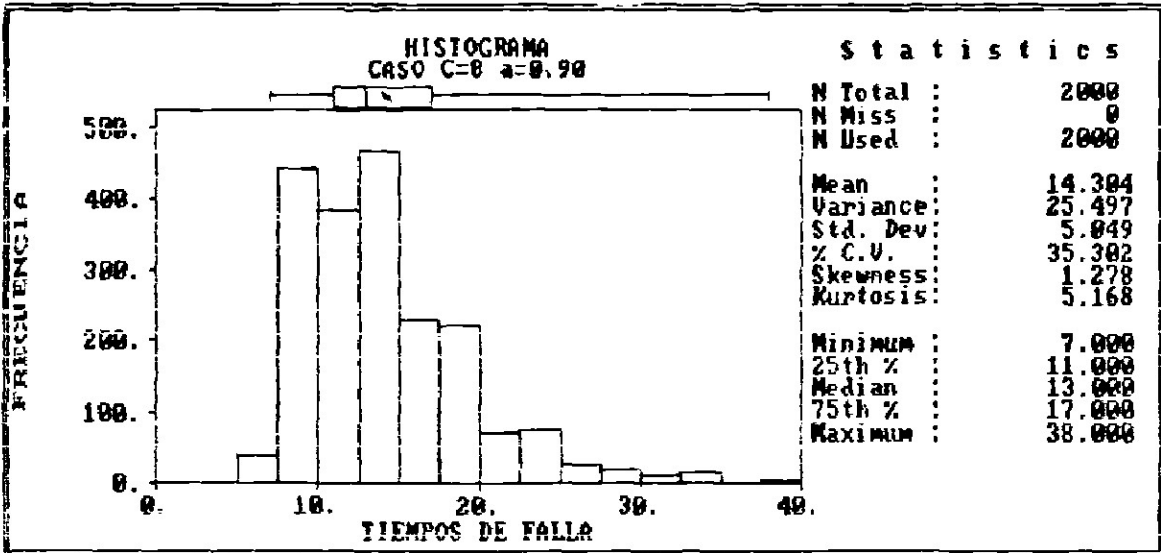


Fig. 10

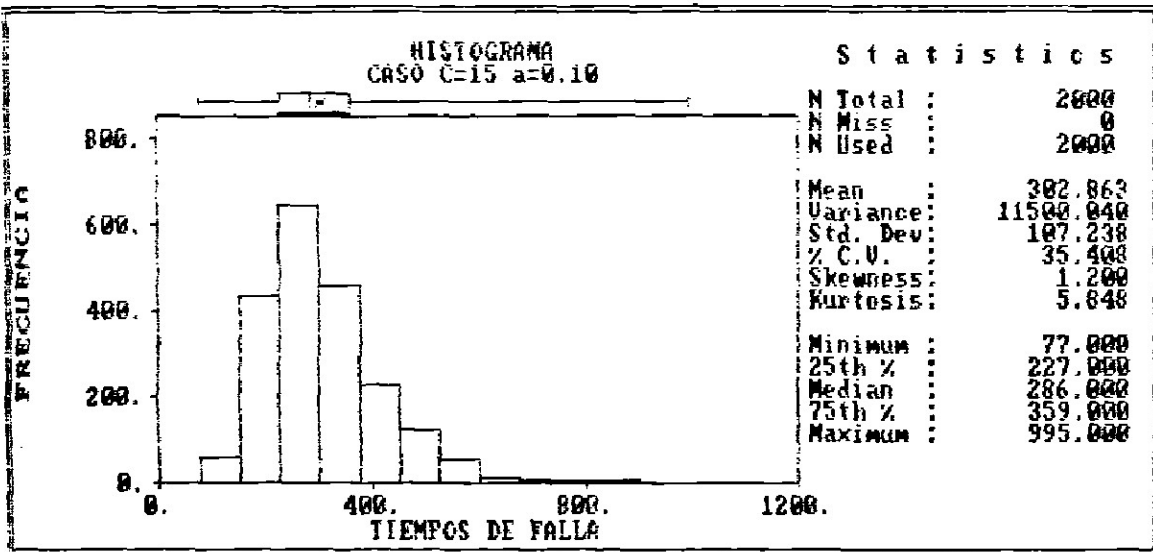


Fig. 11

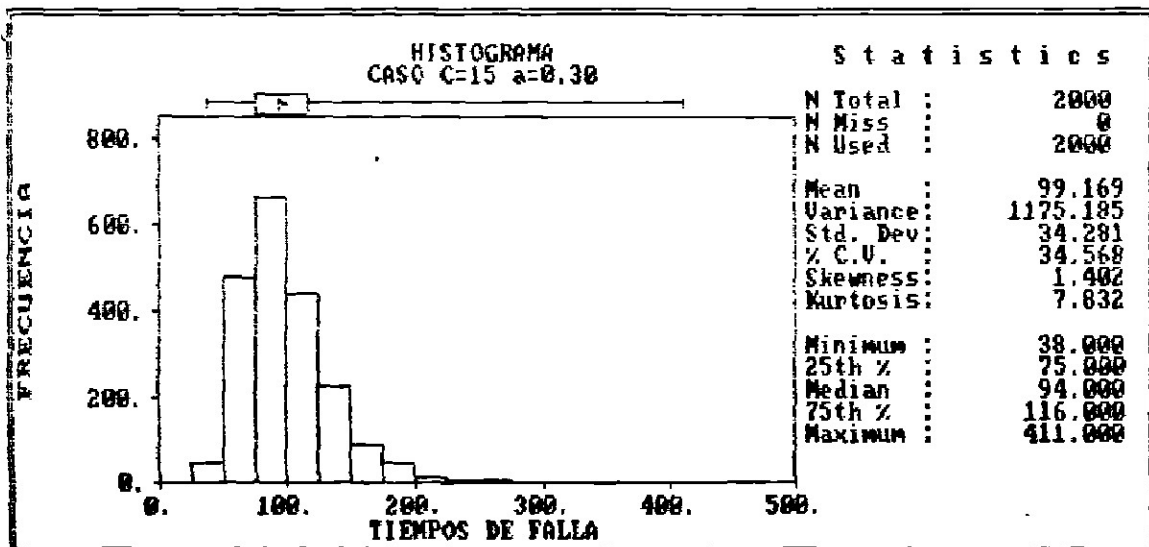


Fig. 12

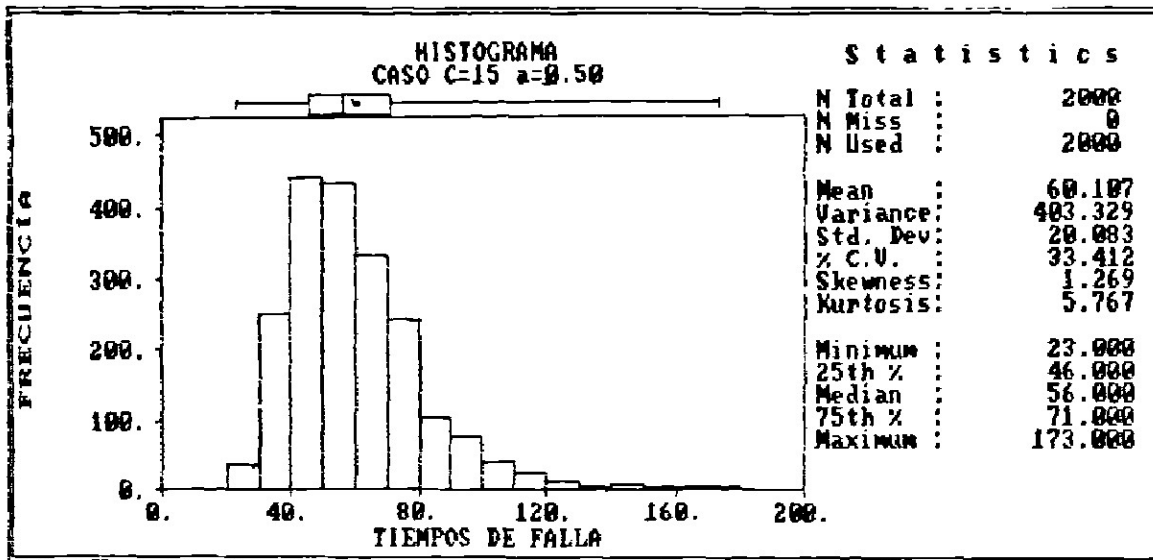


Fig. 13

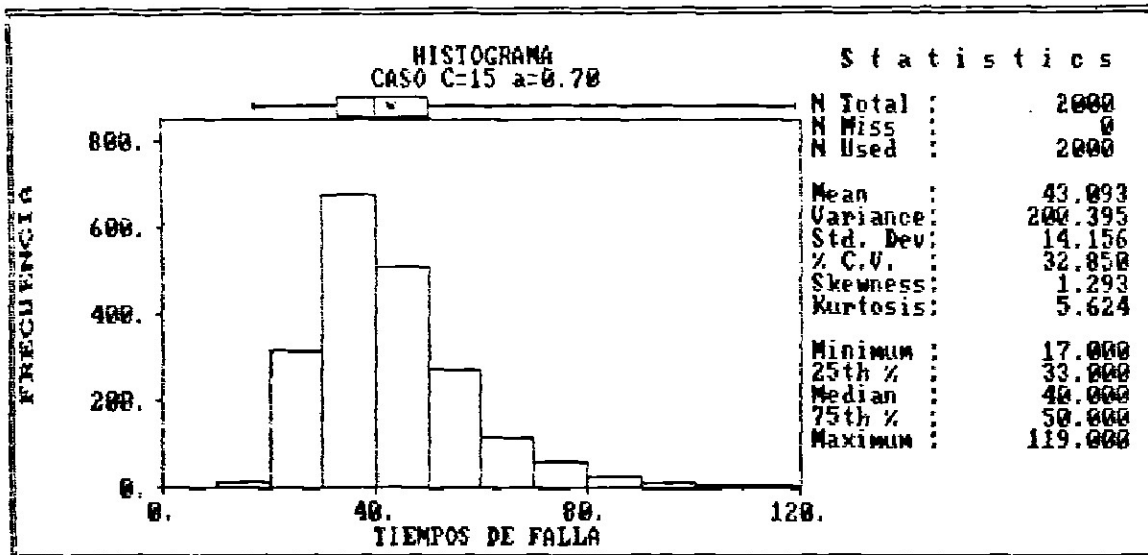


Fig. 14

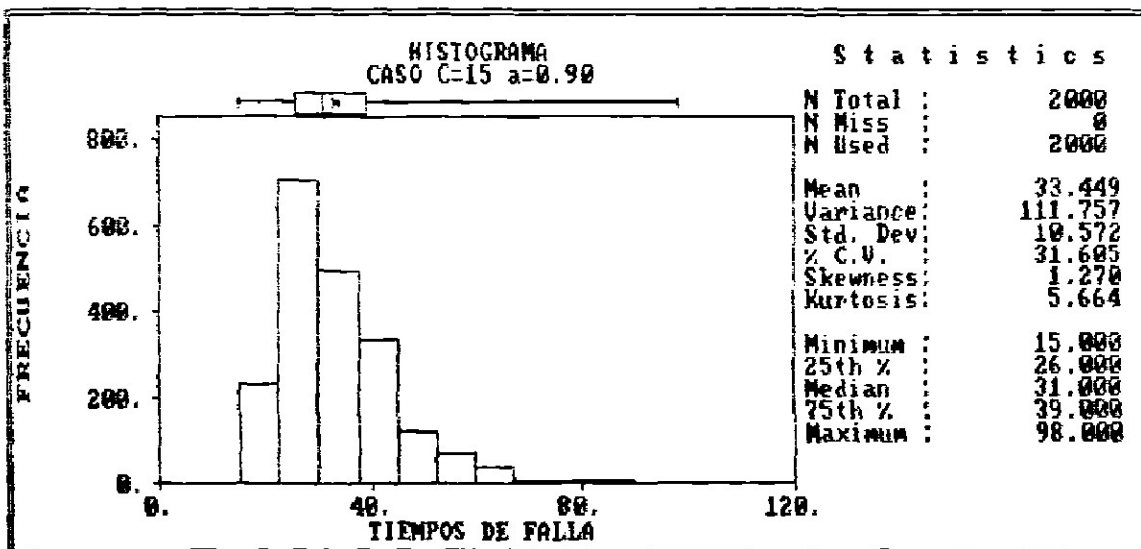


Fig. 15

# MODELOS DIAGONALES

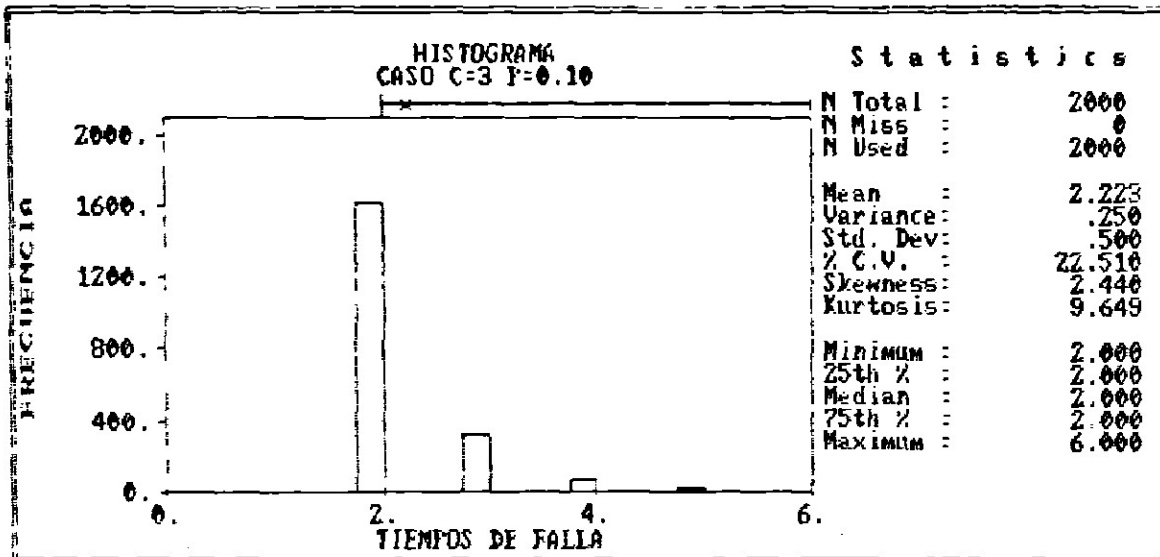


FIG 16

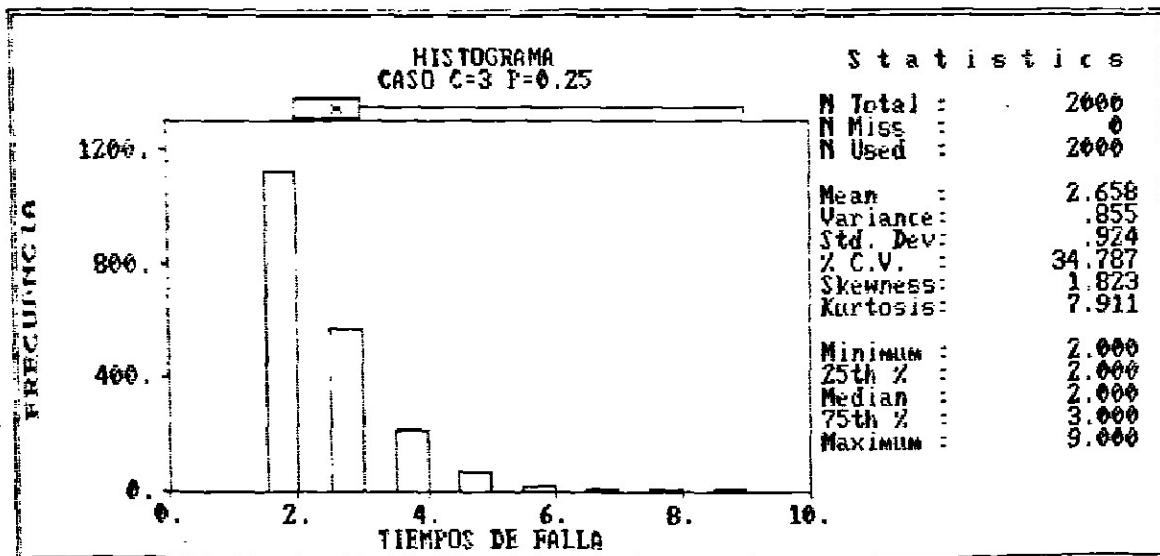


FIG 17

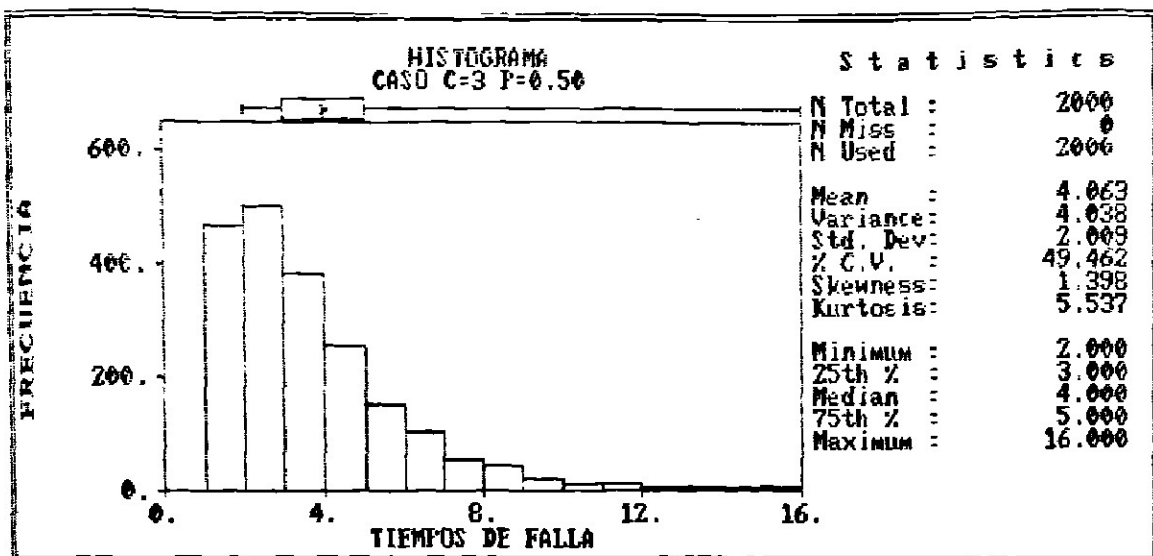


FIG 18

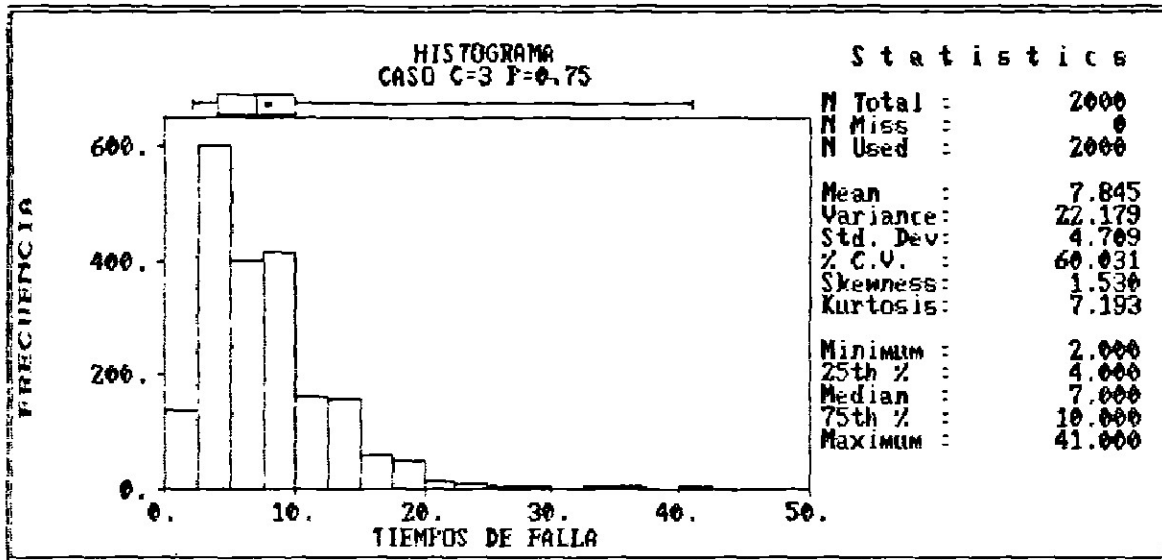


FIG 19

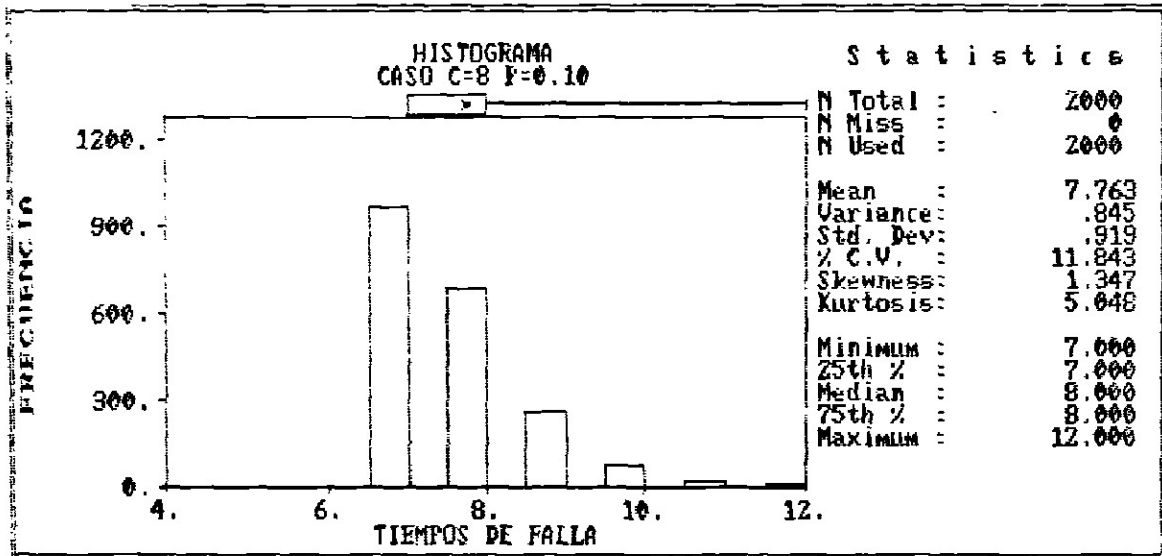


FIG 20

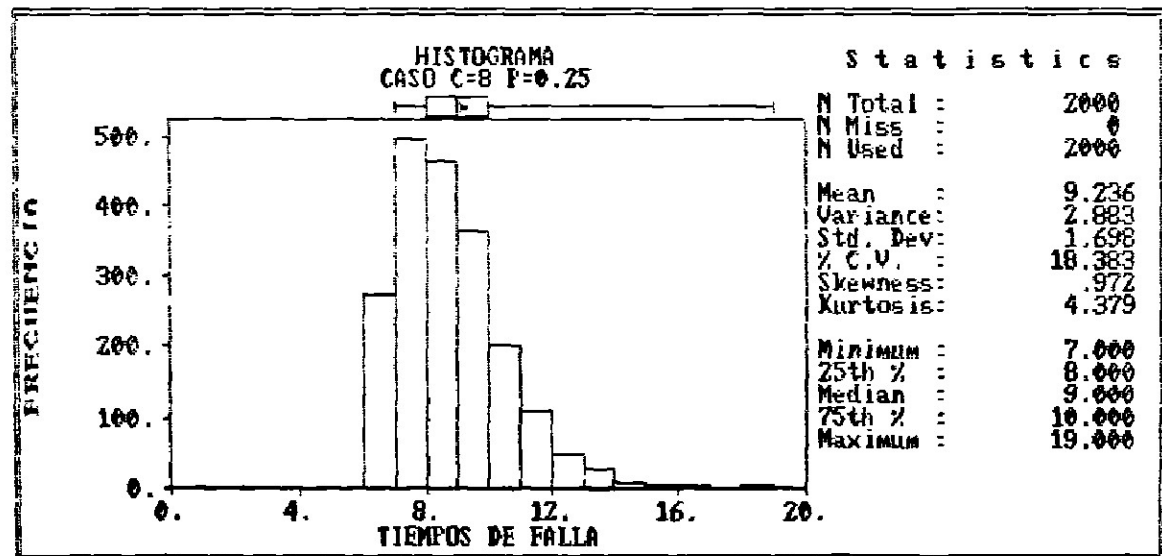


FIG 21

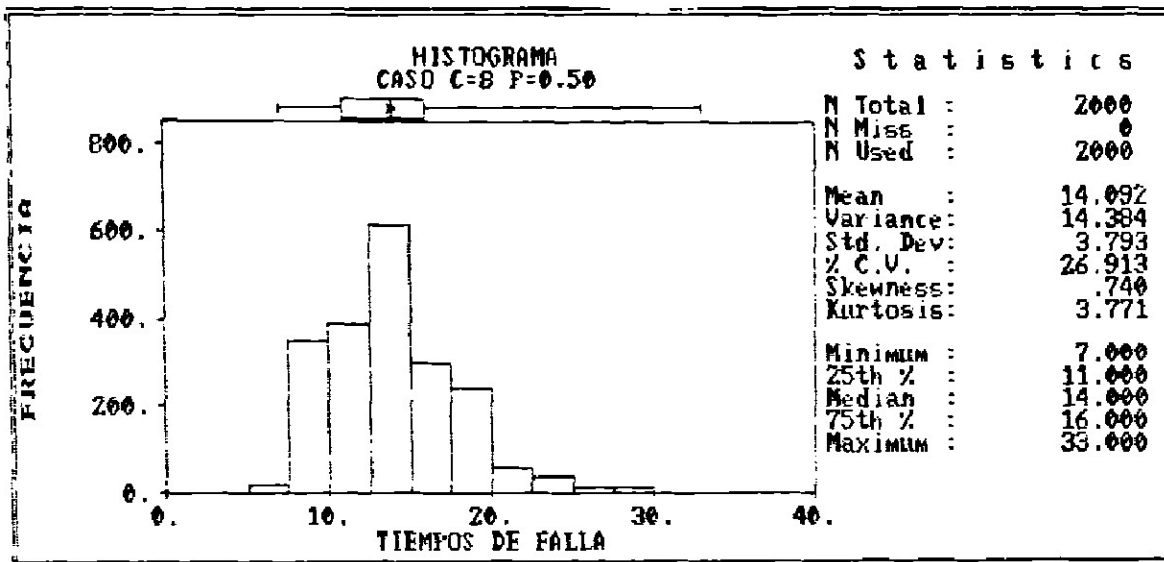


FIG 22

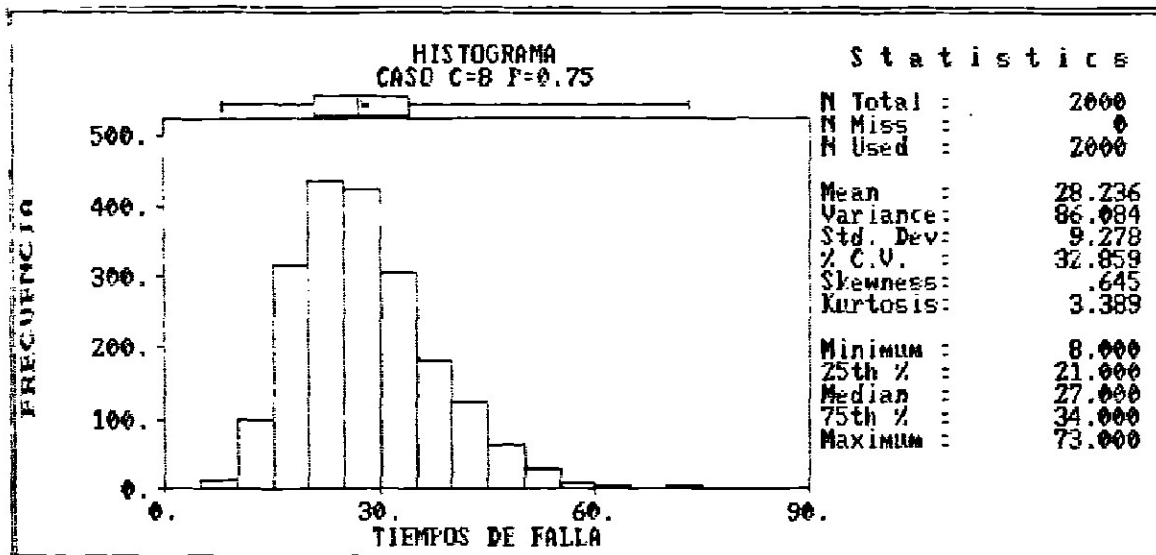


FIG 23

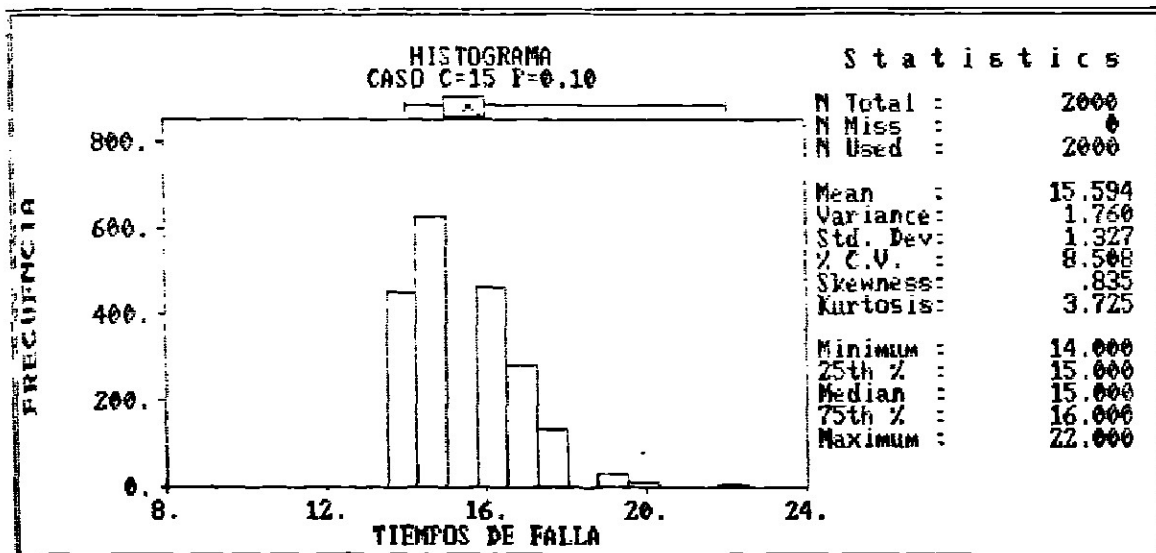


FIG 24

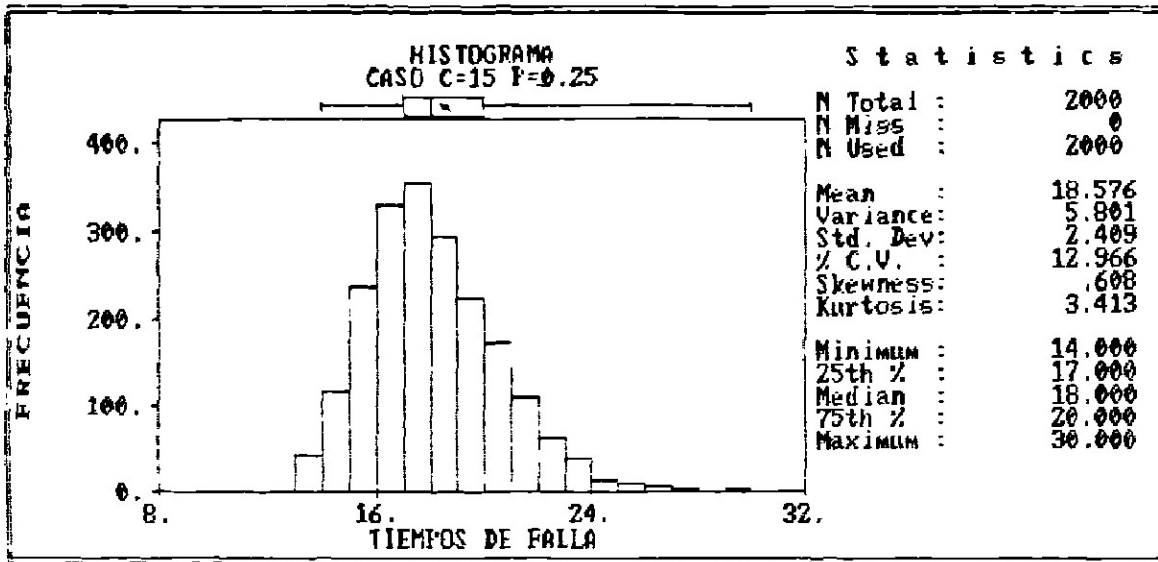


FIG 25

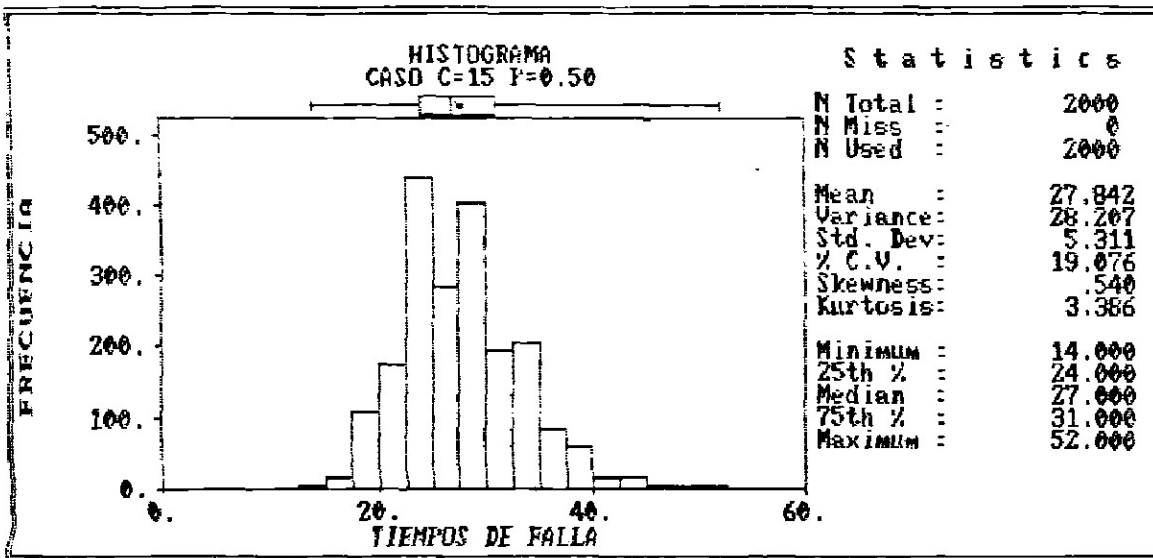


FIG 26

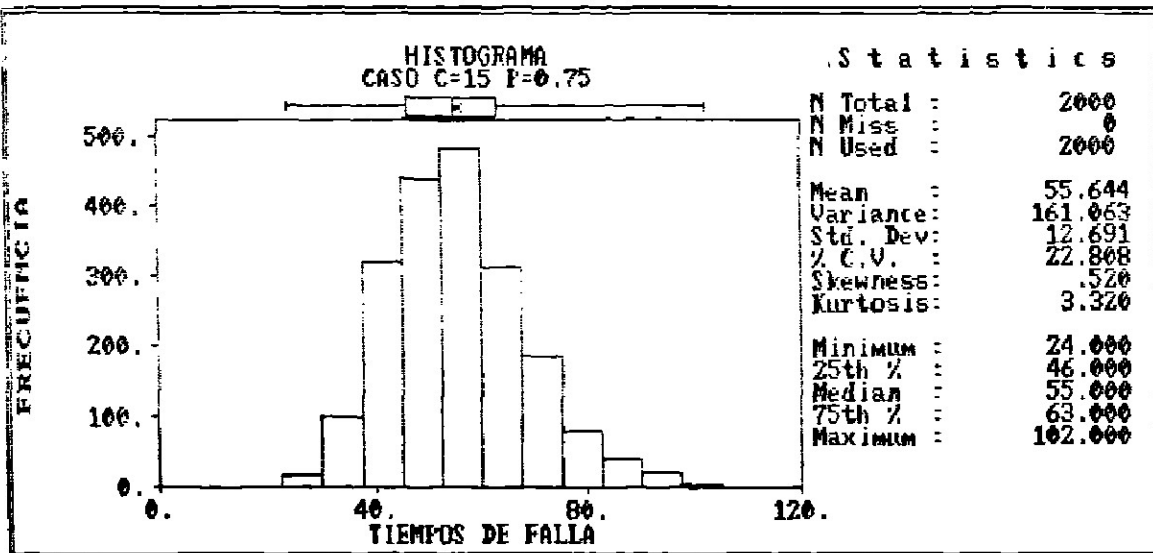


FIG 27

## CAPITULO 2

### LA FUNCIÓN GENERATRIZ DE PROBABILIDADES

#### 2.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES BASICAS

Entre las variables aleatorias discretas, son de especial importancia las que toman sólo los valores enteros no negativos. Dichas variables reciben el nombre de variables aleatorias de conteo. Una herramienta útil para su estudio es la función generatriz de probabilidades, la cual se introduce en el presente capítulo. Para mayor descripción del tema véase, por ejemplo, la referencia [5].

**DEFINICION 2.1** (de [5]): Sea  $a_0, a_1, a_2, \dots$ ; una sucesión de números reales. Si

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

converge en algún intervalo  $-s_0 < s < s_0$ ,  $s_0 > 0$ , entonces  $A(s)$  se le llama función generatriz de la sucesión  $\{a_j\}$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria que toma los valores  $0, 1, 2, \dots$ ; es conveniente obtener la relación para la densidad de  $X$  y la probabilidad de sus colas, las cuales se denotan como:

$$\Pr\{X = j\} = p_j \quad \text{y} \quad \Pr\{X > j\} = q_j,$$

respectivamente. Entonces

$$q_k = p_{k+1} + p_{k+2} + \dots; \quad k \geq 0.$$

Las funciones generatrices de las sucesiones  $\{p_j\}$  y  $\{q_j\}$  son



respectivamente

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$$

y

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k .$$

Cuando  $P(1)=1$ , la serie para  $P(s)$  converge absolutamente, por lo menos para  $-1 \leq s \leq 1$ . Los coeficientes de  $Q(s)$  son menores que uno y, en consecuencia, la serie  $Q(s)$  converge, por lo menos en el intervalo abierto  $-1 < s < 1$ . Se tiene entonces el siguiente teorema que expresa la relación entre  $P(s)$  y  $Q(s)$ .

**TEOREMA 2.1:** Para  $-1 < s < 1$  se cumple que

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s} .$$

**Demostración:** De las definiciones de  $P(s)$  y  $Q(s)$ , se tiene

$$(1-s)Q(s) = q_0 + (q_1 - q_0)s + \dots + (q_n - q_{n-1})s^n + \dots .$$

Por otra parte se tiene que

$$q_n - q_{n-1} = -p_n \quad \text{para } n \geq 1$$

y

$$q_0 = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1 - p_0 .$$

Entonces

$$(1-s)Q(s) = 1 - p_0 - p_1 s - p_2 s^2 - p_3 s^3 - \dots = 1 - (p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots) ,$$

de donde

$$(1-s)Q(s) = 1 - P(s) .$$

Por lo tanto

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s} . \quad \blacksquare$$

A continuación se analiza la derivada de  $P(s)$  y algunas propiedades que resultan de esto. Se obtiene la serie

$$P'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} ,$$

la cual converge por lo menos para  $-1 < s < 1$ . Para  $s = 1$ , el miembro derecho se reduce formalmente a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E(X).$$

Esto motiva el enunciado del siguiente teorema de resultados ya conocidos:

**TEOREMA 2.2:**

(1) La esperanza  $E(X)$ , en caso de existir, satisface las relaciones

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

o en términos de las funciones generatrices

$$E(X) = P'(1) = Q(1).$$

(2) También se tiene que si  $E(X^2) < \infty$ , entonces

$$\text{VAR}(X) = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2$$

o

$$\text{VAR}(X) = 2Q'(1) + Q(1) - [Q'(1)]^2.$$

**Demostración:**

Queda únicamente por demostrar (2). Se tiene que

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$$

de donde al derivarse queda que

$$P'(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j s^{j-1}$$

y

$$P''(s) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) p_j s^{j-2}.$$

Al evaluarse la segunda derivada en  $s = 1$  se obtiene

$$P''(1) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) p_j = E(X(X-1))$$

de donde al simplificar y sustituir (1) se tiene que

$$P''(1) = EX^2 - EX = EX^2 - P'(1).$$

Por otra parte se sabe que

$$\text{VAR}(X) = EX^2 - [EX]^2$$

de donde se sigue el resultado. ■

La aplicación del concepto de función generatriz adquiere particular importancia en el contexto de una variable aleatoria de conteo:

**DEFINICION 2.2:** La función generatriz de probabilidades (FGP)  $\phi_x(z)$ , para la variable aleatoria discreta  $X$ , la cual solo toma los valores enteros no negativos con probabilidades  $P(X=j)=p_j$ , se define por la ecuación

$$\phi_x(z) = E(z^X) = \sum_0^{\infty} p_k z^k .$$

Note que  $\phi_x(z)$  es simplemente la función generatriz de la sucesión  $p_0, p_1, \dots$  y que

$$\phi_x(1) = \sum_0^{\infty} p_k = 1 .$$

Derivando esta función se tiene que

$$\phi'_x(z) = \sum_1^{\infty} k p_k z^{k-1}$$

y

$$\phi'_x(0) = p_1 .$$

Por derivación sucesiva se tiene

$$\phi_x^{(n)}(z) = \sum_n^{\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)p_k z^{k-n}$$

y

$$\phi_x^{(n)}(0) = n! p_n .$$

De hecho, es posible demostrar ([5]) que la función  $\phi_x(z)$  determina completamente la densidad de probabilidad de  $X$ .

Ejemplos de FGP son:

$\phi_x(z) = \exp(\lambda(z-1))$  si X se distribuye Poisson con parámetro  $\lambda$ .

$\phi_x(z) = (pz+1-p)^n$  si X se distribuye Binomial con parámetros n y p.

$\phi_x(z) = \left[ \frac{p}{1-z(1-p)} \right]^n$  si X es Binomial Negativa con parámetros n y p.

A partir de la expresión para  $\phi_x^{(n)}(z)$  se obtiene también

$$\phi_x^{(n)}(1) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)p_k,$$

es decir,

$$\phi_x^{(n)}(1) = EC(X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)),$$

el llamado *n-ésimo momento factorial de X*.

Enseguida se describe una versión empírica de  $\phi_x(z)$  que tendrá aplicación en problemas de estimación, debido a ciertas propiedades que también se enunciarán. Véase por ejemplo [2] y [7] para mayores detalles.

## 2.2 LA FUNCION GENERATRIZ DE PROBABILIDADES EMPIRICA

**DEFINICIÓN 2.3:** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de tamaño n de variables aleatorias de conteo. Se define la función generatriz de probabilidades empíricas (FGPE) por

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{X_i}.$$

Esta función aleatoria tiene propiedades que darán la pauta para su uso en el siguiente capítulo. Estas se enuncian en la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 2.1:**

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de valores enteros no negativos con FGP  $\phi_x(z)$  y  $EX_1^2 < \infty$ . Entonces,

(i) Con probabilidad 1 y  $\forall z \in [0,1] : \phi_n(z) \rightarrow \phi_x(z)$  cuando  $n \rightarrow \infty$

(ii) Con probabilidad 1  $\sup_{z \in [0,1]} |\phi_n(z) - \phi_x(z)| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

(iii)  $\forall z \in [0,1] : \sqrt{n} (\phi_n(z) - \phi_x(z)) \rightarrow N(0, \phi(z^2) - \phi^2(z))$  en distribución cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Demostración:** Ver referencia [7]. ■

La conclusión (i) es simplemente la Ley Fuerte de los Grandes Números, aplicada a cada  $z$  fija. La propiedad (ii) es un resultado sobre convergencia uniforme en  $z$  y justifica el empleo de  $\phi_n(z)$  para aproximar a la función  $\phi_x(z)$ . La propiedad (iii) constituye la distribución asintótica normal de  $\phi_n(z)$  para cada  $z$ , pero es un resultado puntual. Para  $\phi_n(z)$  visto como proceso estocástico,  $\phi_n(z)$  para  $z \in [0,1]$ , se tiene la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 2.2:**

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de valores enteros no negativos cada una con FGP  $\phi_x(z)$  y  $EX_1^2 < \infty$ . Entonces,

$$\sqrt{n} (\phi_n(z) - \phi_x(z))$$

converge débilmente a un proceso Gaussiano con función de covarianza

$$C(s,t) = \phi(st) - \phi(s)\phi(t),$$

donde  $0 \leq s, t \leq 1$ .

**Demostración:** Ver también referencia [7]. ■

En el caso particular de que los datos sean tiempos de falla,  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , como en los modelos de daño acumulado del tipo descrito en el Capítulo 1, la FGPE toma la forma siguiente:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{T_i}.$$

Más adelante se establecerá el uso de esta función para resolver el problema de estimación paramétrica en ciertos modelos de daño acumulado en los cuales los tiempos de falla son discretos. La justificación del método se deberá principalmente a los resultados de la Proposición 2.1.

Se finaliza esta sección con una proposición útil:

**PROPOSICIÓN 2.3:**

Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias de conteo independientes, y suponga que  $X_i$  tiene FGP  $\phi_i(z)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $X = X_1 + \dots + X_n$  es variable aleatoria de conteo y su FGP está dada por

$$\phi_x(z) = \prod_{i=1}^n \phi_i(z).$$

**Demostración:**

La demostración se basa principalmente en el hecho de que las variables son independientes y cada una de ellas tiene FGP. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_x(z) &= E(z^X) = E(z^{X_1 + \dots + X_n}) = E(z^{X_1} \dots z^{X_n}) \\ &= \prod_{i=1}^n (E(z^{X_i})) = \prod_{i=1}^n (\phi_i(z)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La siguiente sección tiene como principal objetivo obtener la función generatriz de probabilidades para algunos de los modelos descritos en la Sección 1.3 .

## 2.3 LA FUNCIÓN GENERATRIZ DE PROBABILIDADES PARA ALGUNOS MODELOS DE DAÑO ACUMULADO

En la Sección 1.4 se adoptó una nomenclatura para cierta clase de modelos de daño acumulado basada en cadenas de Markov. De acuerdo a sus matrices de probabilidades de transición, se habían distinguido los modelos diagonales y no diagonales. Siendo que los tiempos de falla  $T$  en dichos modelos dan lugar a variables aleatorias de conteo, tiene sentido la referencia a sus funciones generatrices de probabilidades  $\phi_T(z)$ .

El propósito de este capítulo es mostrar la forma explícita que tienen las  $\phi_T(z)$  en los casos diagonal y no diagonal.

Para obtener esta función, se emplean los supuestos de la Sección 1.3 acerca de cadenas de Markov. Los modelos a considerar son cadenas de Markov con MPT

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

y con la suposición de que el proceso siempre se inicia en el estado 1.

Sea  $W_1$  tiempo que el proceso permanece en el estado 1. El valor  $p_1$  es la probabilidad de que después de un ciclo el proceso permanezca en el estado 1, mientras que  $q_1$  es la probabilidad de que brinque al estado 2 en un paso dado que se encontraba en el estado 1. Cada ciclo puede identificarse como una variable aleatoria Bernoulli independiente con parámetro  $p_1$ , donde se salta al estado 2 si y sólo si la variable Bernoulli correspondiente toma el valor 1. Se tiene entonces

$$\Pr \langle W_1 = x \rangle = q_1 p_1^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots,$$

esto es,  $W_1$  tiene distribución geométrica con parámetro  $p_1$ . Sea ahora  $W_j$  el tiempo de permanecer en el estado  $j$  con probabilidad  $p_j$ . Siguiendo el mismo argumento se encuentra, para el valor de  $j=1, \dots, c-1$ ,

$$\Pr \langle W_j = x \rangle = q_j p_j^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots;$$

donde cada  $W_j$  tiene distribución geométrica con parámetro  $p_j$ . Más aún,  $W_1, \dots, W_{c-1}$  son variables aleatorias independientes.

Sea ahora  $T$  el tiempo de alcanzar el estado  $c$  dado que se inició en el estado 1 al tiempo  $x=0$ . Entonces

$$T = W_1 + W_2 + \dots + W_{c-1}.$$

Los  $W_j$  son independientes y la función generadora de probabilidades de  $W_j$  es

$$\phi_j(z) = E(z^{x_j}) = \sum_{x=1}^{\infty} q_j p_j^{x-1} z^x,$$

y al simplificar se obtiene

$$\phi_j(z) = \frac{q_j z}{1 - p_j z}.$$

Se deduce entonces por la Proposición 2.3, que la función generatriz de probabilidades de la variable  $T$  es el producto de las FGP de cada  $W_j$ , esto es,

$$\phi_T(z) = \prod_1^{c-1} \left( \frac{q_j z}{1 - p_j z} \right),$$



de donde se obtiene que

$$\phi_T(z) = \frac{q_1 q_2 \dots q_{c-1} z^{c-1}}{(1-p_1 z) \dots (1-p_{c-1} z)} .$$

Esta expresión muestra cómo la FGP de T depende de P, la MPT de la cadena de Markov asociada al modelo no diagonal. Para el modelo diagonal, la función generatriz de probabilidades se reduce a la relación

$$\phi_T(z) = \left( \frac{q z}{1 - pz} \right)^{c-1} .$$

Entonces se ha probado el siguiente teorema:

**TEOREMA 2.3:** La función generatriz de probabilidades de los tiempos de falla del modelo no diagonal está dada por

$$\phi_T(z) = \frac{q_1 q_2 \dots q_{c-1} z^{c-1}}{(1-p_1 z) \dots (1-p_{c-1} z)}$$

y para el modelo diagonal se tiene

$$\phi_T(z) = \left( \frac{q z}{1 - pz} \right)^{c-1} ,$$

donde c es el número de estados, p la probabilidad de permanecer en el estado i, para  $1 \leq i < c$ , y  $q = 1-p$ . ■

## 2.4 GRAFICAS DE LAS FUNCIONES GENERATRICES DE PROBABILIDADES.

Enseguida se presentan algunas gráficas de FGP (teóricas) y FGPE para los distintas configuraciones de parámetros y varios tamaños de muestras. En la Tabla 2.1 se muestran los valores de los parametros que se variaron en los dos modelos, para construir gráficas de las FGP obtenidas en el Teorema 2.3. En la Tabla 2.2

se muestran los casos en que se graficaron las FGPE para el modelo no diagonal, a distintos tamaños de muestras, mientras que las configuraciones para modelos diagonales se muestran en la Tabla 2.3 .

Para el caso de las gráficas de la FGPE, se utilizaron tiempos de falla simulados por un programa similar al del capítulo anterior al cual se le anexó una rutina que evaluara la FGPE en el intervalo  $(0,1)$ . Se utilizó la rutina XYGRAPH del paquete estadístico GEOEAS.

Con la producción de gráficas de FGPE a distintos tamaños de muestra, puede verificarse empíricamente la velocidad de la convergencia uniforme descrita en la proposición 2.1 (ii). Por otra parte, la construcción de gráficas de FGP para modelos diagonales y no diagonales permite hacer comparaciones entre ambos tipos de modelos. En particular, para distinguir si la forma de la FGP puede utilizarse como un instrumento de identificación de modelos.

TABLE 1  
 FISHING EFFORT AND FISH CATCHES

1964		
Floor	# of stations (n)	Volume of $\alpha$
1	3	100,000 2.50 100,000 2.50
2	4	100,000 2.50 100,000 2.50
3	5	100,000 2.50 100,000 2.50
1965		
Floor	# of stations (n)	Volume of $\alpha$
1	3	100,000 2.50 100,000 2.50
2	4	100,000 2.50 100,000 2.50
3	5	100,000 2.50 100,000 2.50

TABLE 2  
 FISHING EFFORT AND FISH CATCHES

Floor	# of stations (n)	Volume of $\alpha$	Volume of $\beta$
1	3	100,000	100,000 2.50
2		200,000	
3		300,000	
4		400,000	
5		500,000	

TABLE 2.2  
CONTINUATION

11	8	0.10	10, 20, 50, 75
12		0.25	
14		0.50	
16		0.75	
18		1.00	
19	15	0.10	10, 20, 50, 75
21		0.25	
23		0.50	
24		0.75	

TABLE 2.3  
MODEL DISJUNCT

Flow	# of estuaries	Probability (p)	# of flows
21	8	0.10	10
22		0.25	25
23		0.50	50
24		0.75	75
25	8	0.10	10
26		0.25	25
27		0.50	50
28		0.75	75
29	15	0.10	10
30		0.25	25
31		0.50	50
32		0.75	75

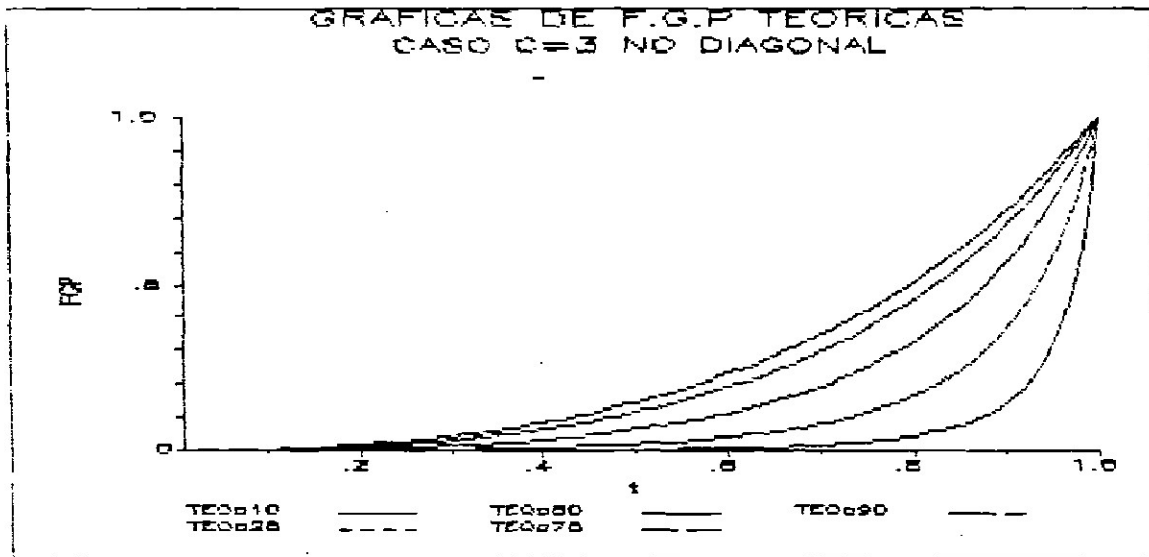


FIG # 1

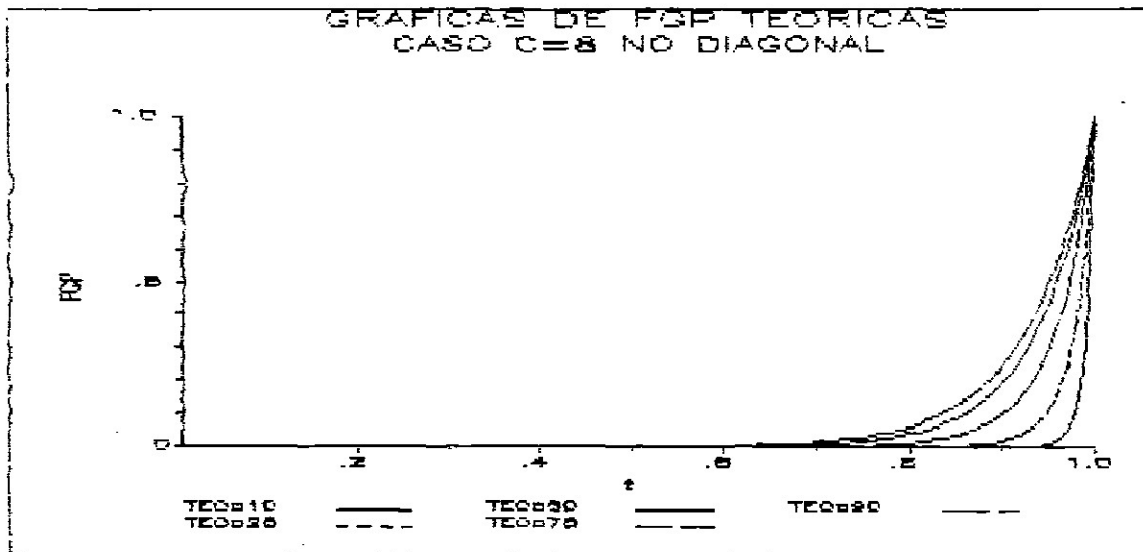


FIG # 2

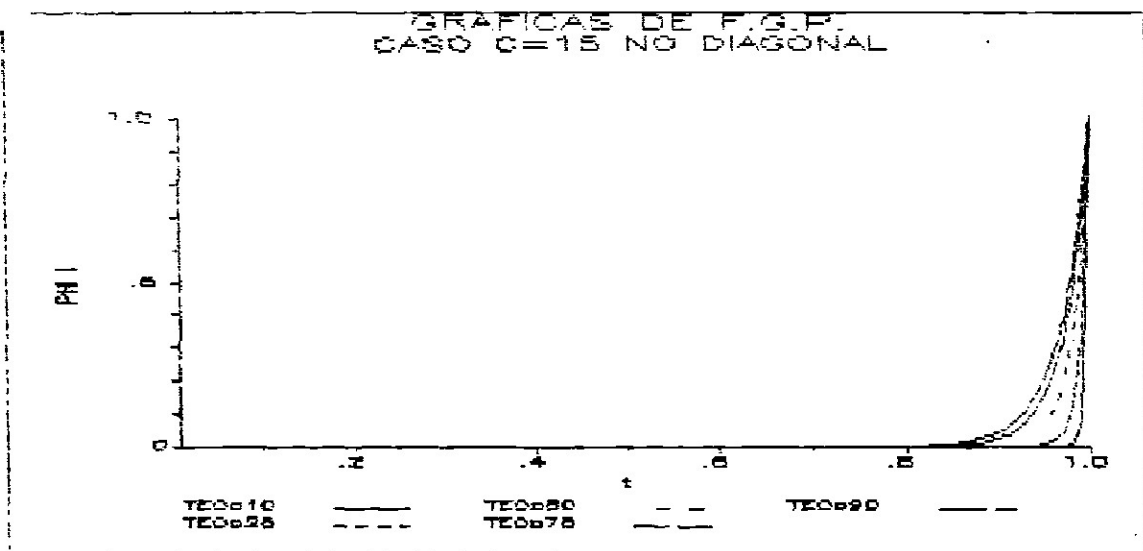


FIG # 3

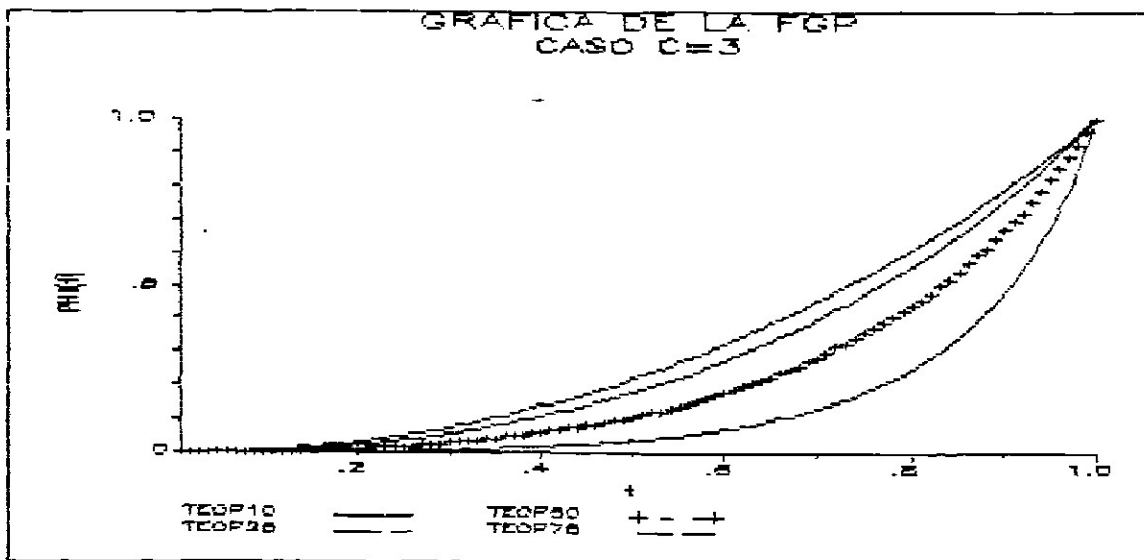


FIG # 4

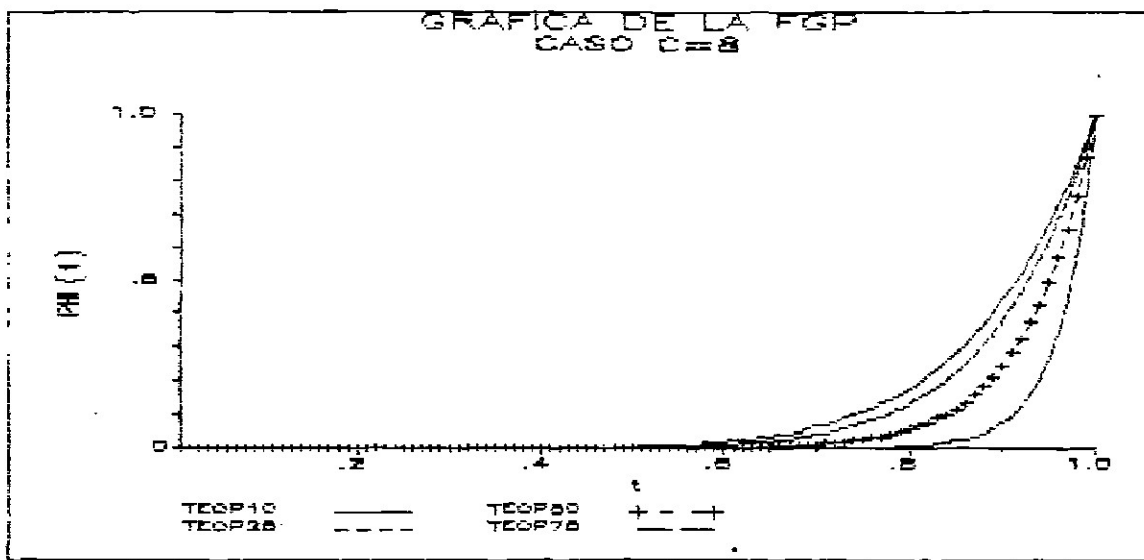


FIG # 5

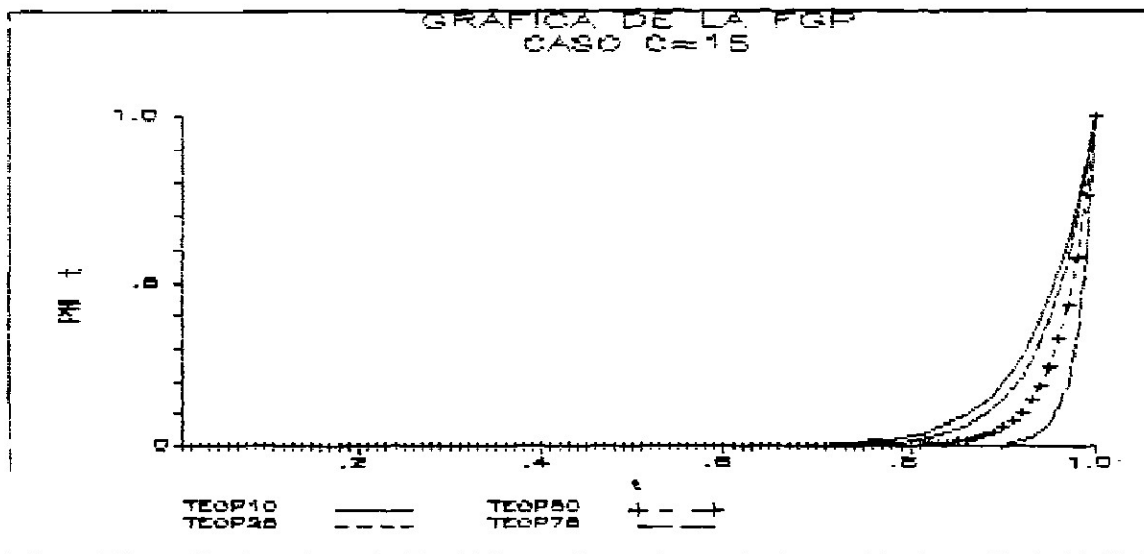


FIG # 6

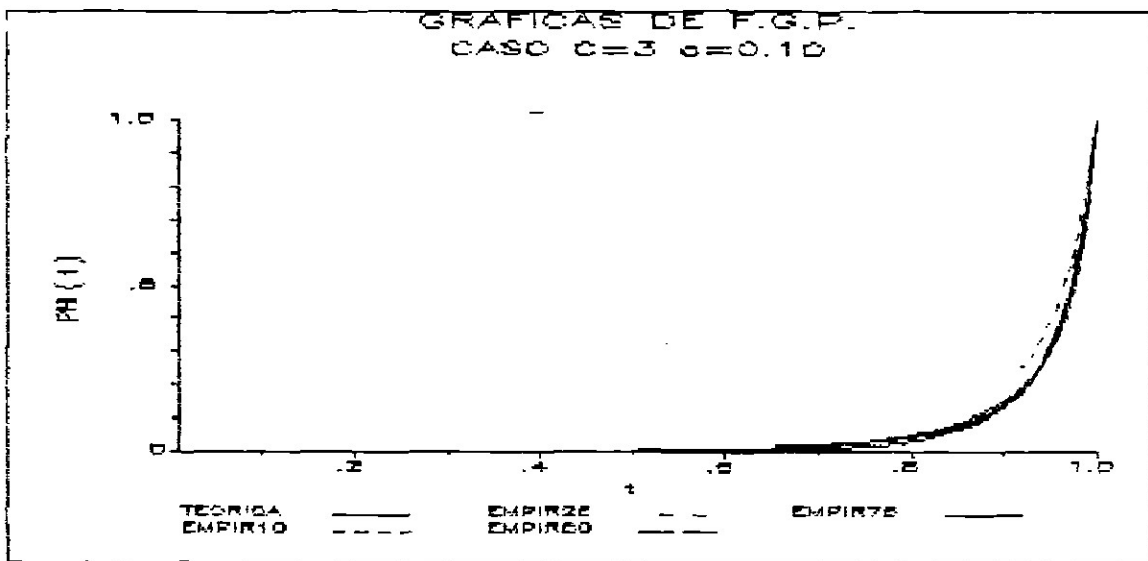


Fig # 7

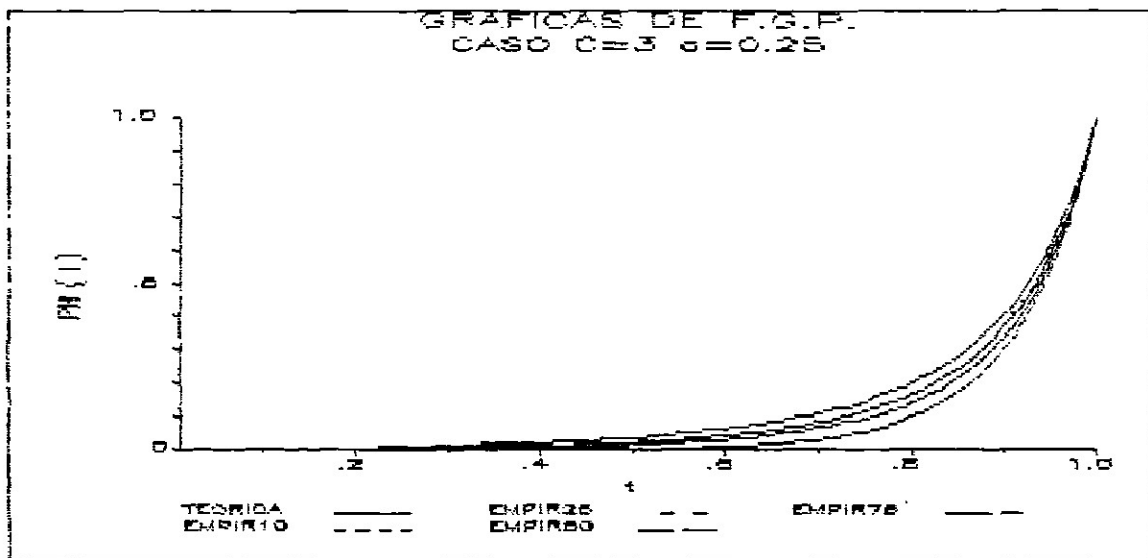


Fig # 8

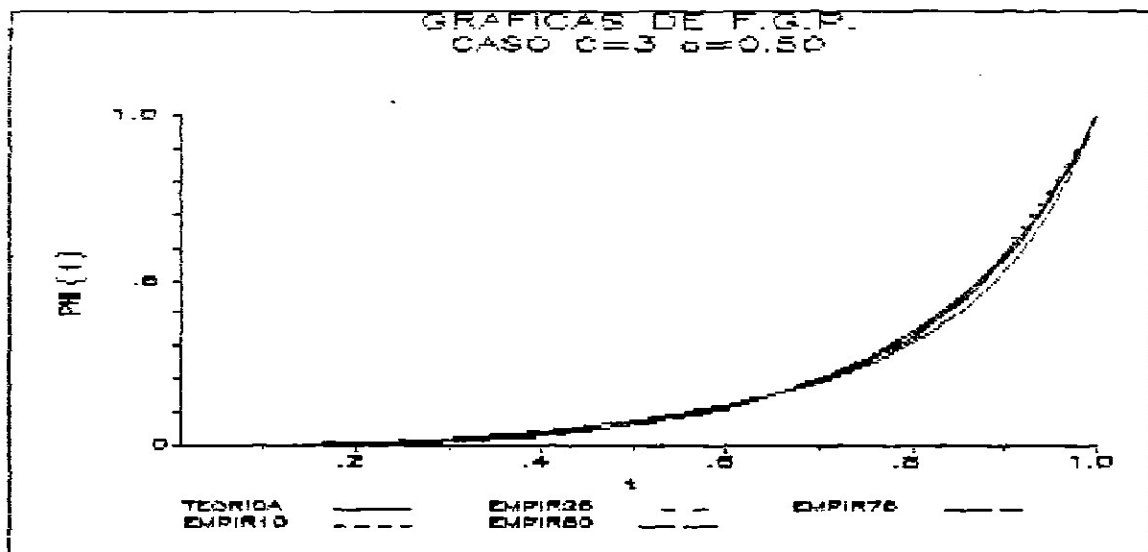


Fig # 9

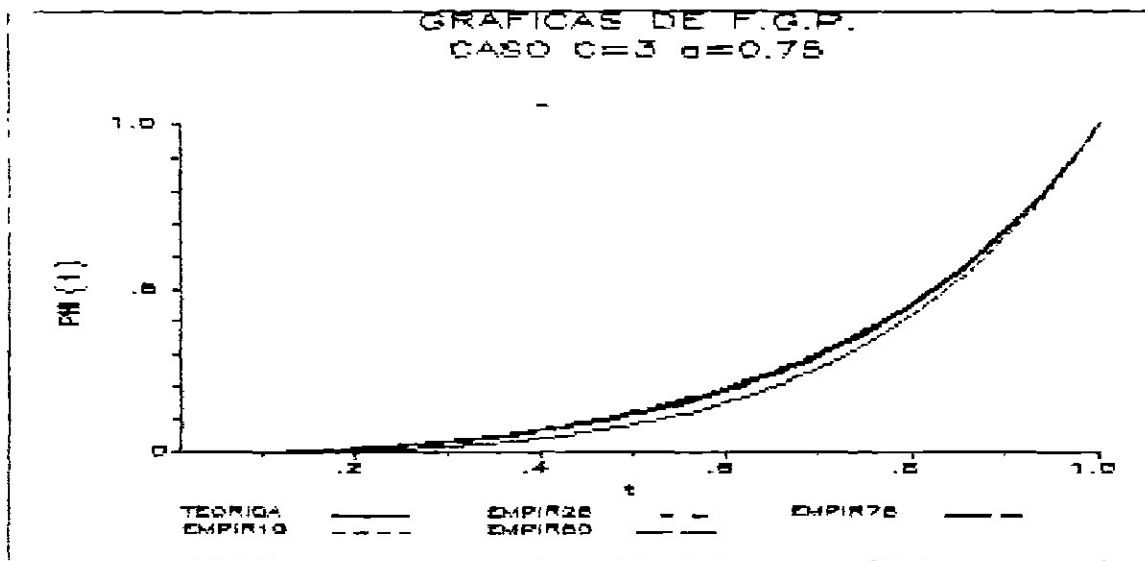


FIG # 10

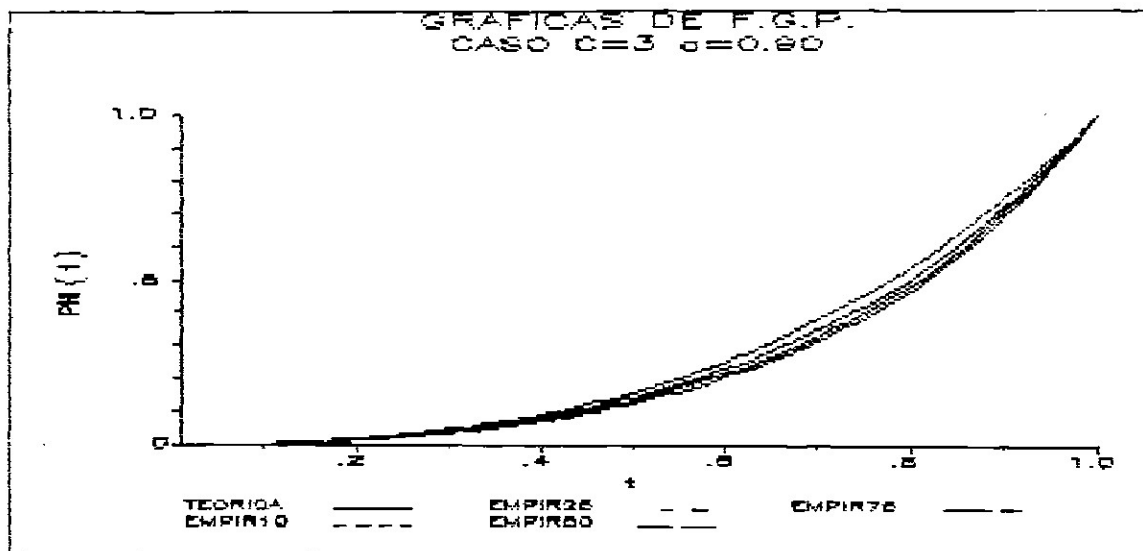


FIG # 11

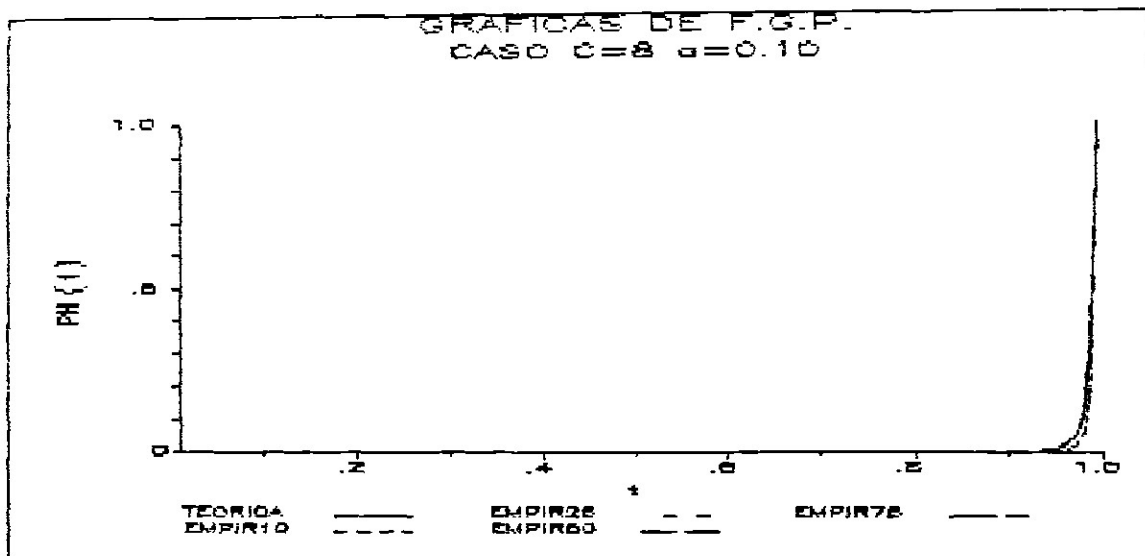


FIG # 12



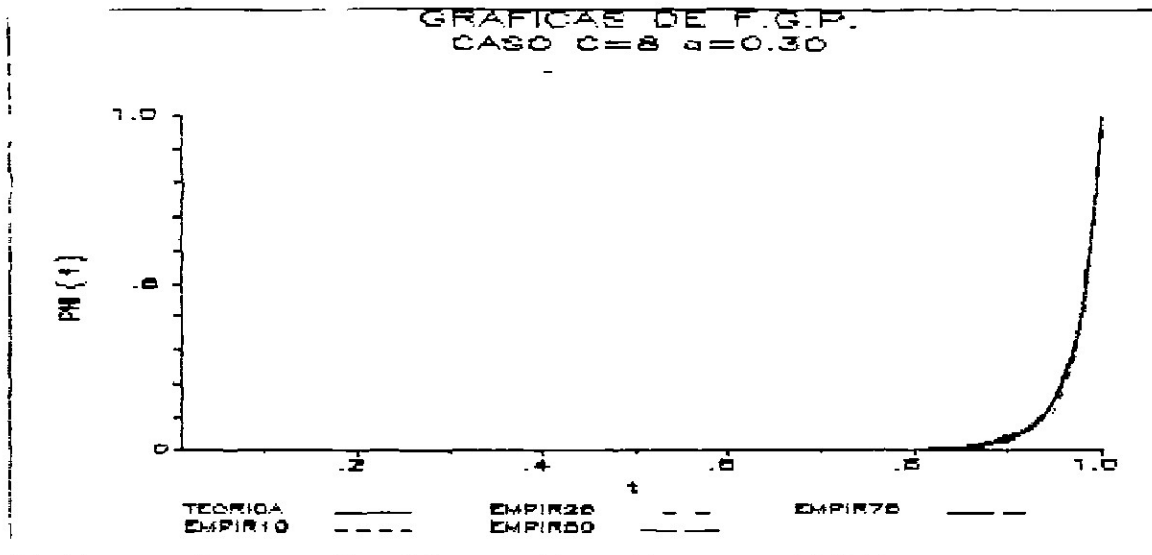


FIG # 13

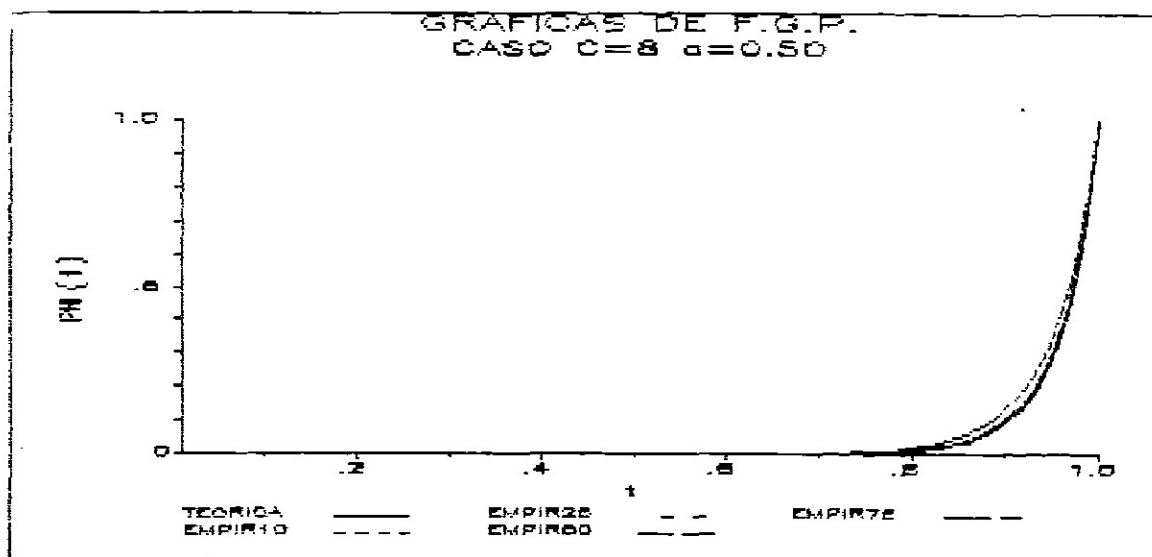


FIG # 14

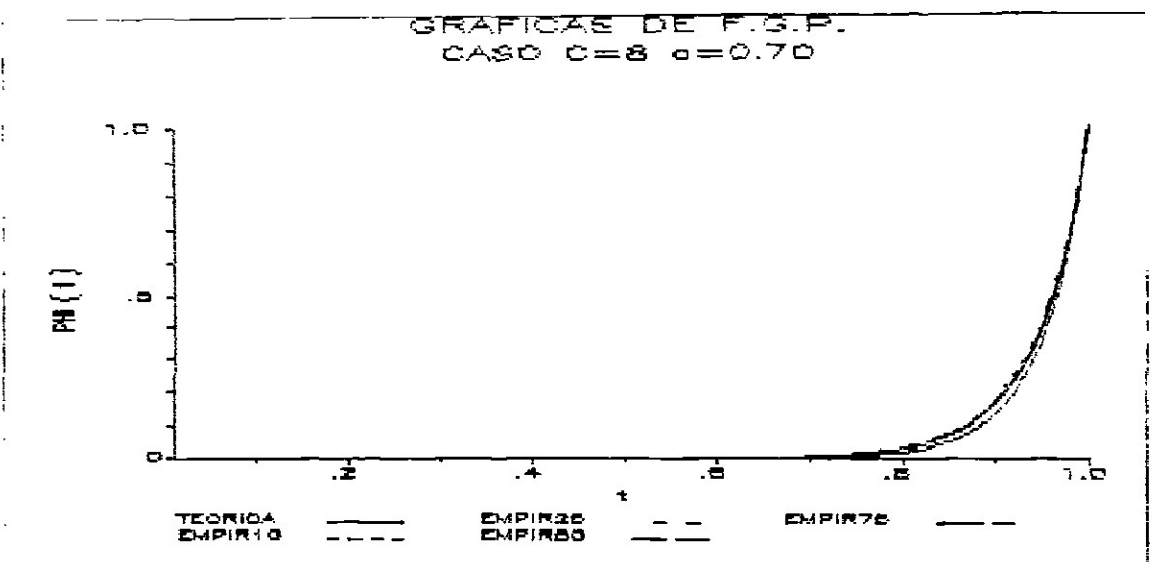


FIG # 15

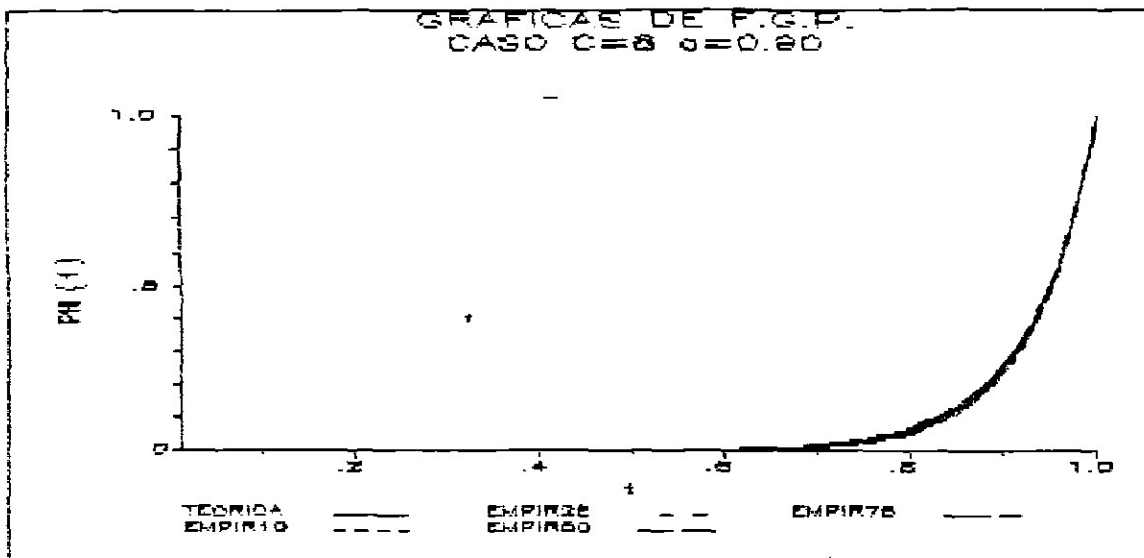


Fig # 16

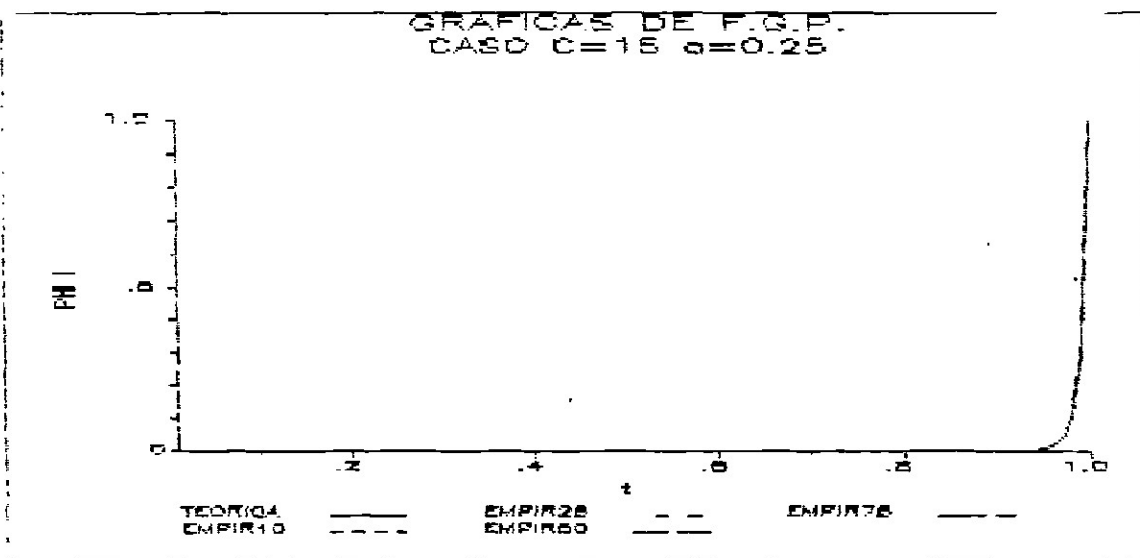


Fig # 17

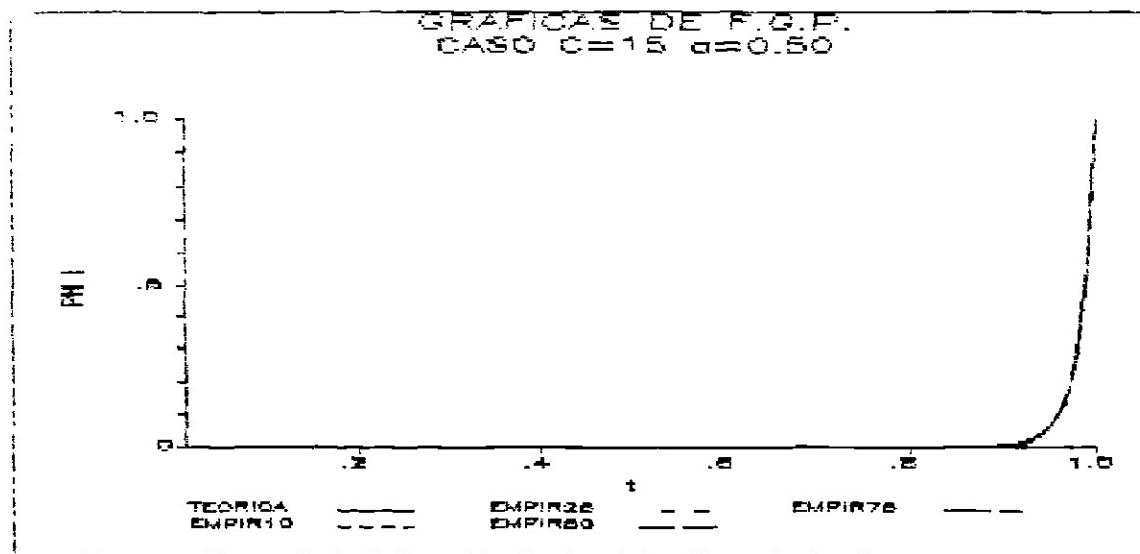


Fig # 18

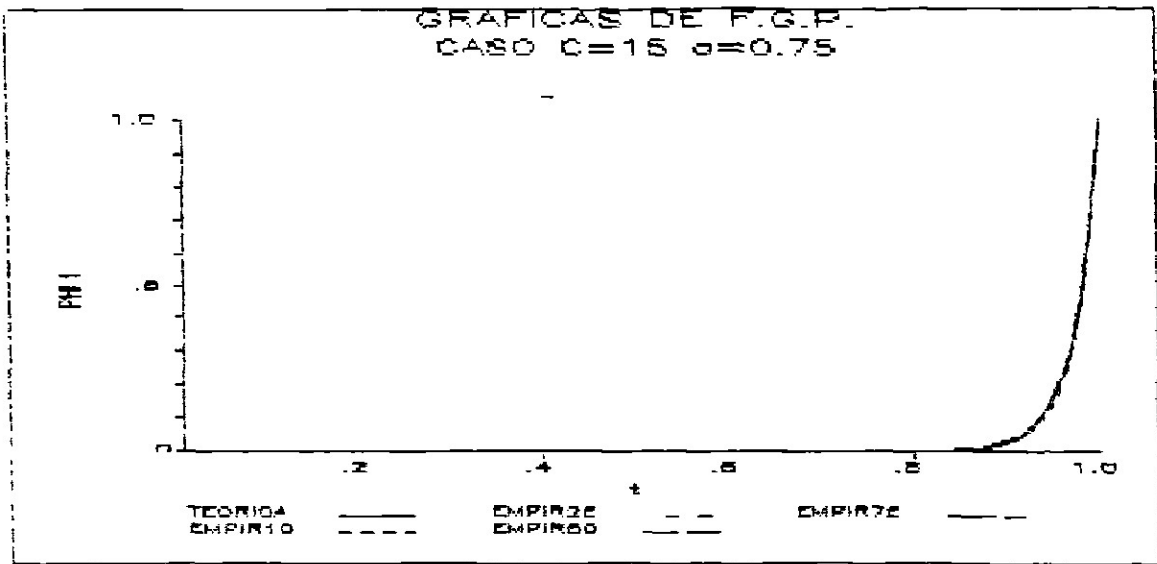


Fig # 19

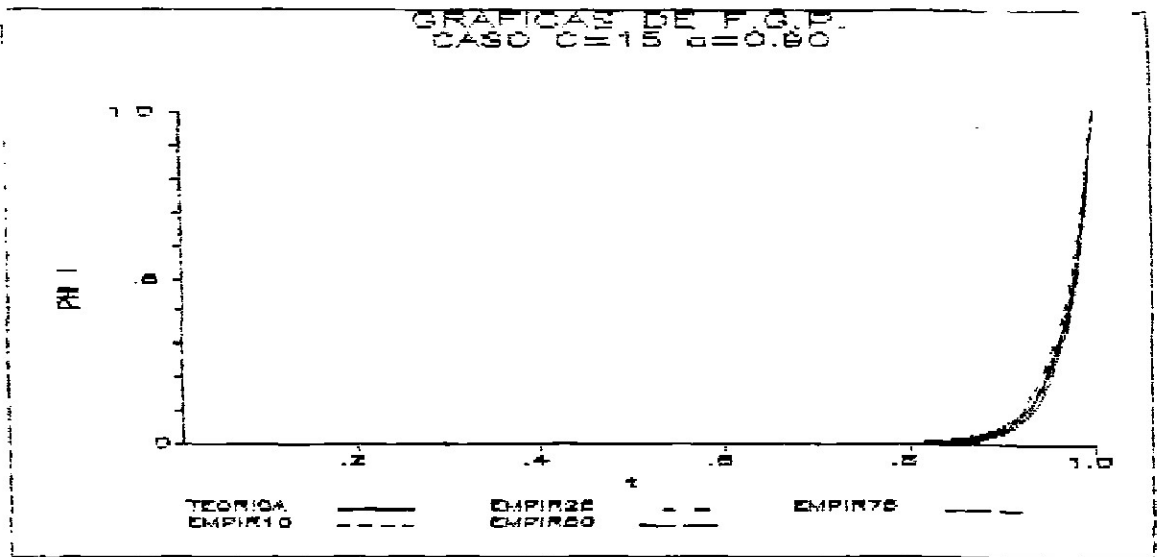


Fig # 20

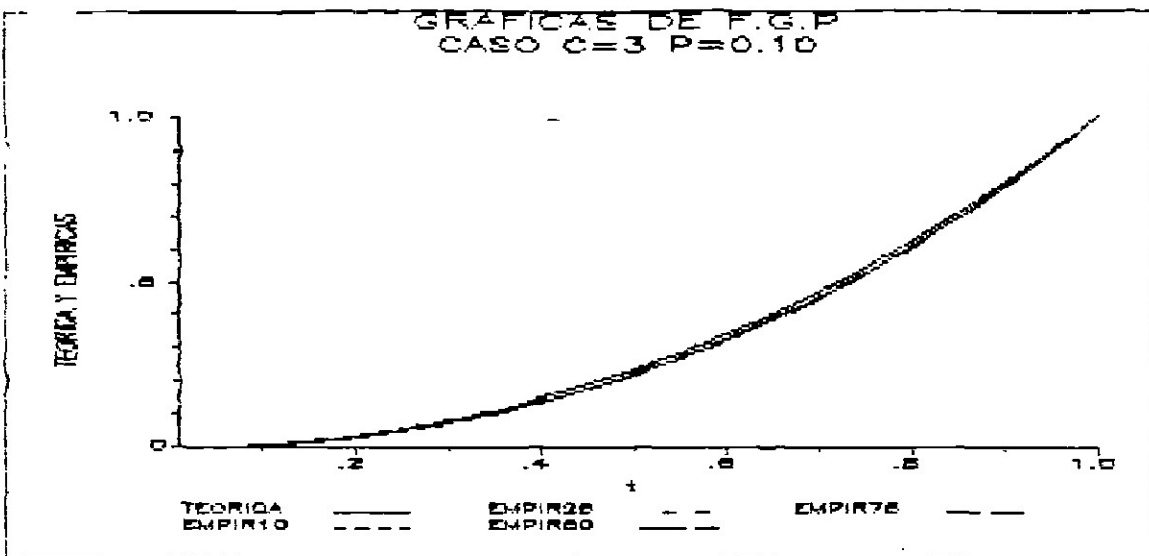


FIG # 21

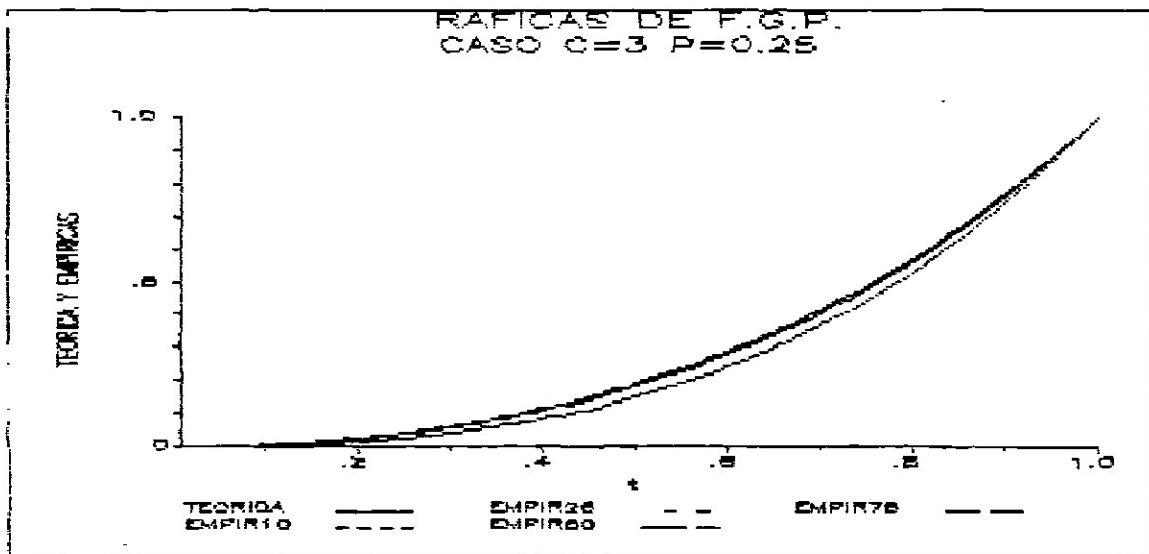


FIG # 22

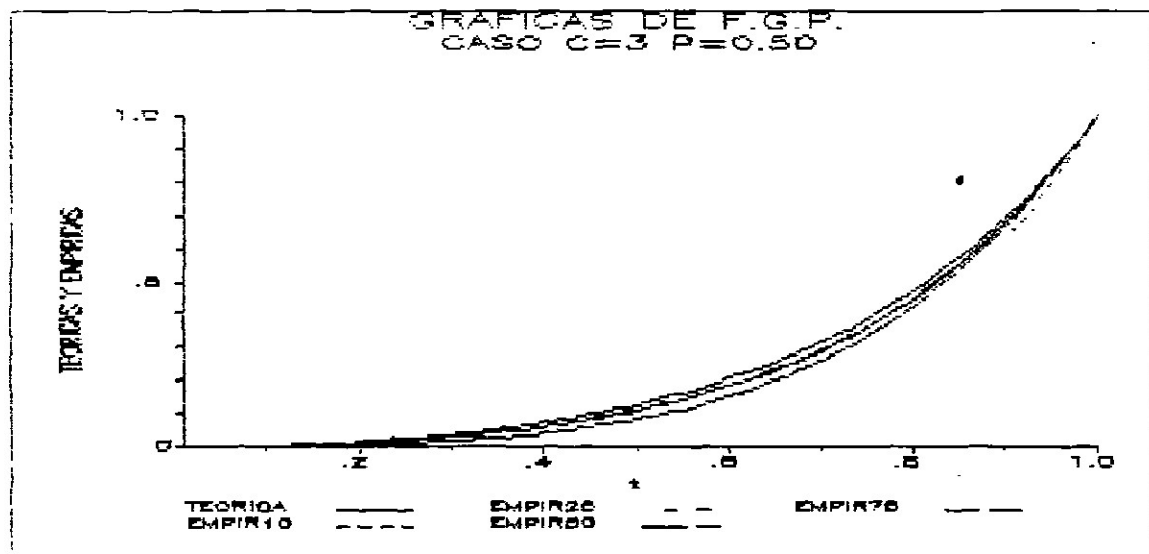


FIG # 23

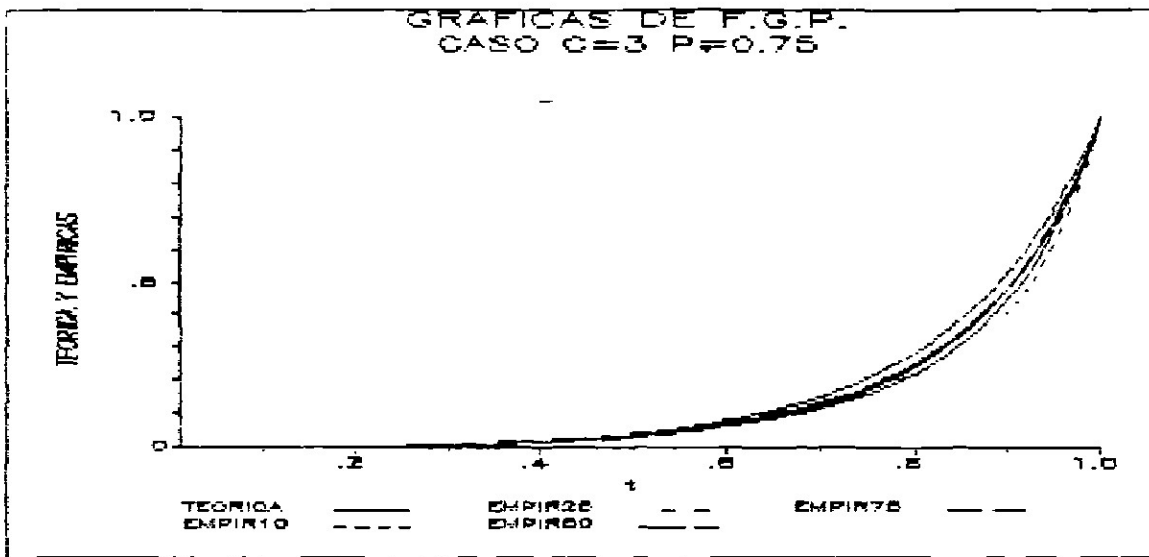


Fig # 24

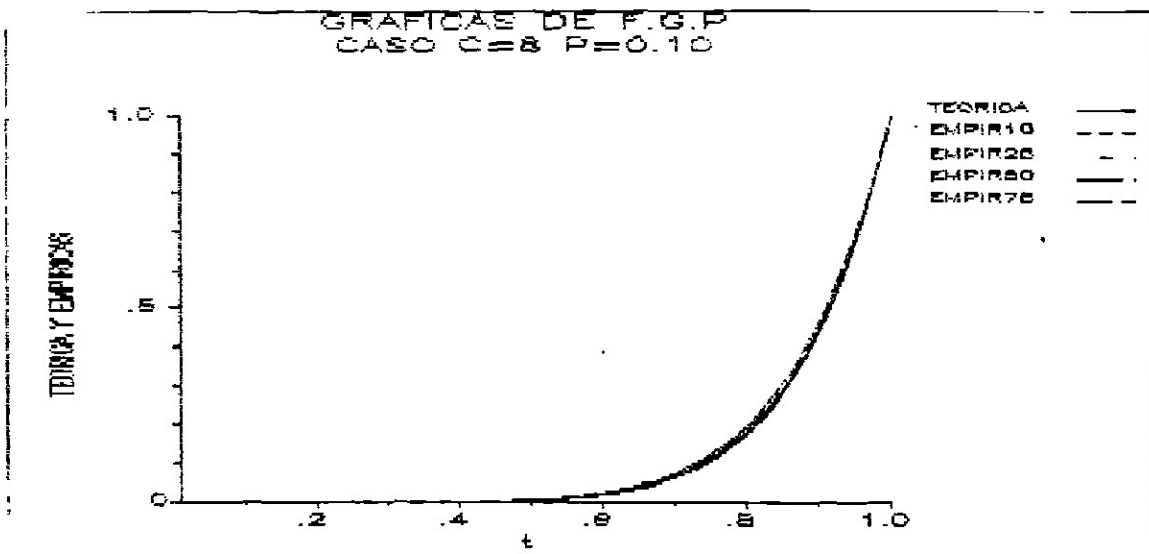


Fig # 25

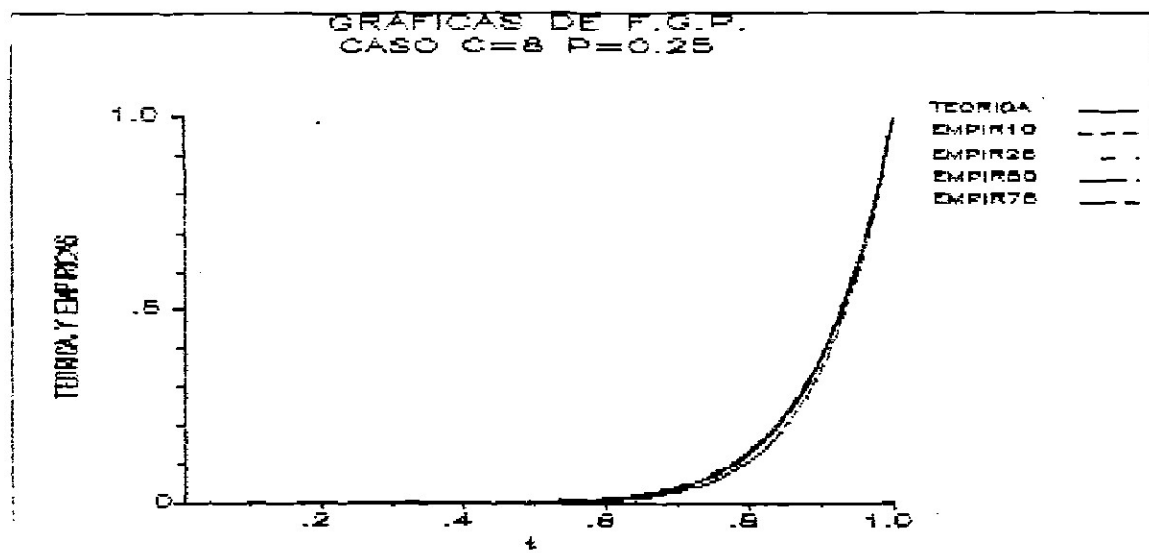


Fig # 26

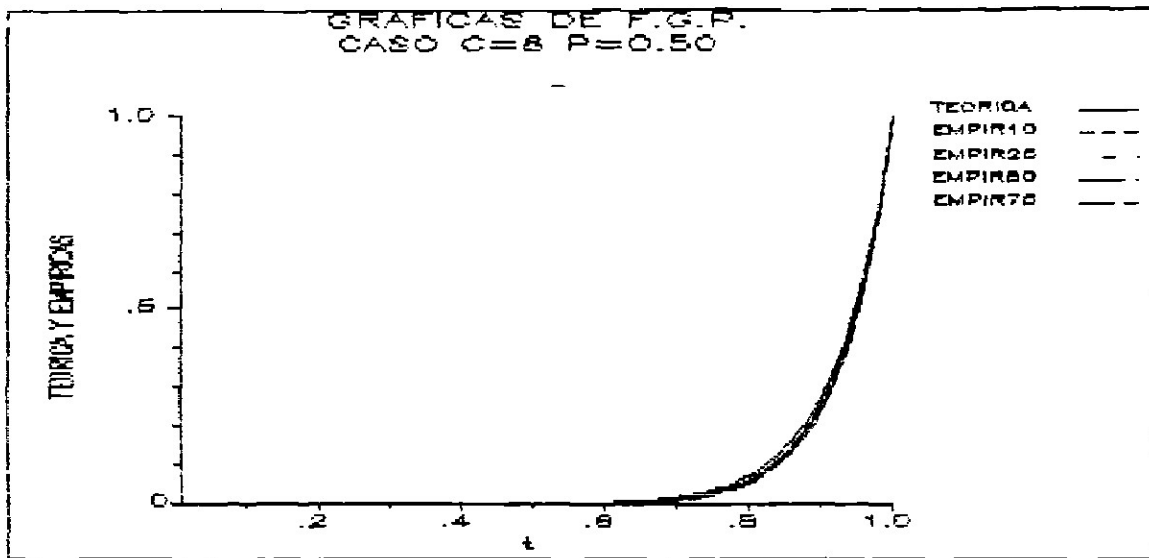


Fig # 27

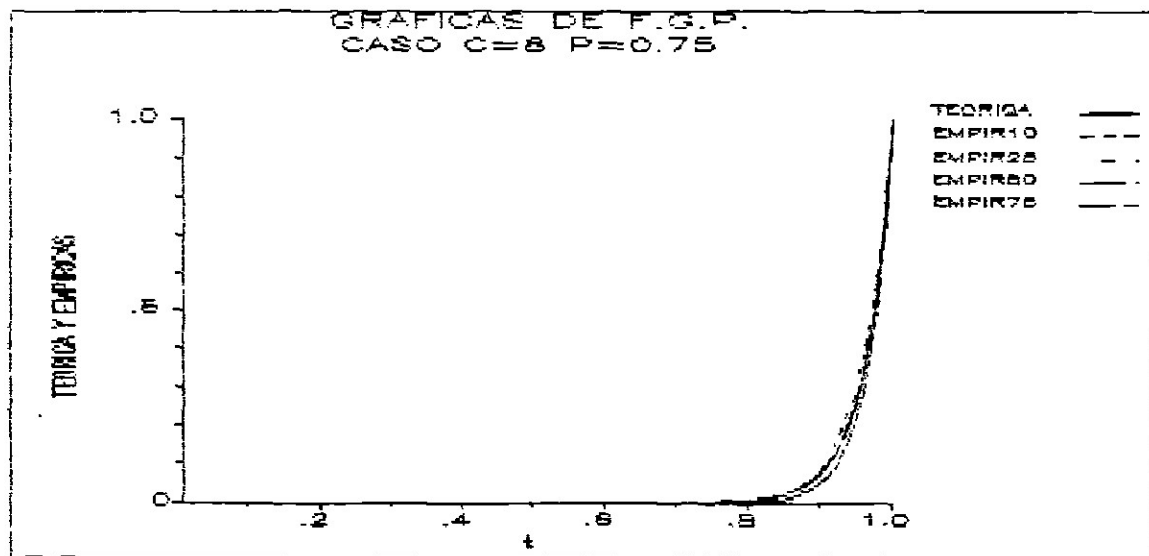


Fig # 28

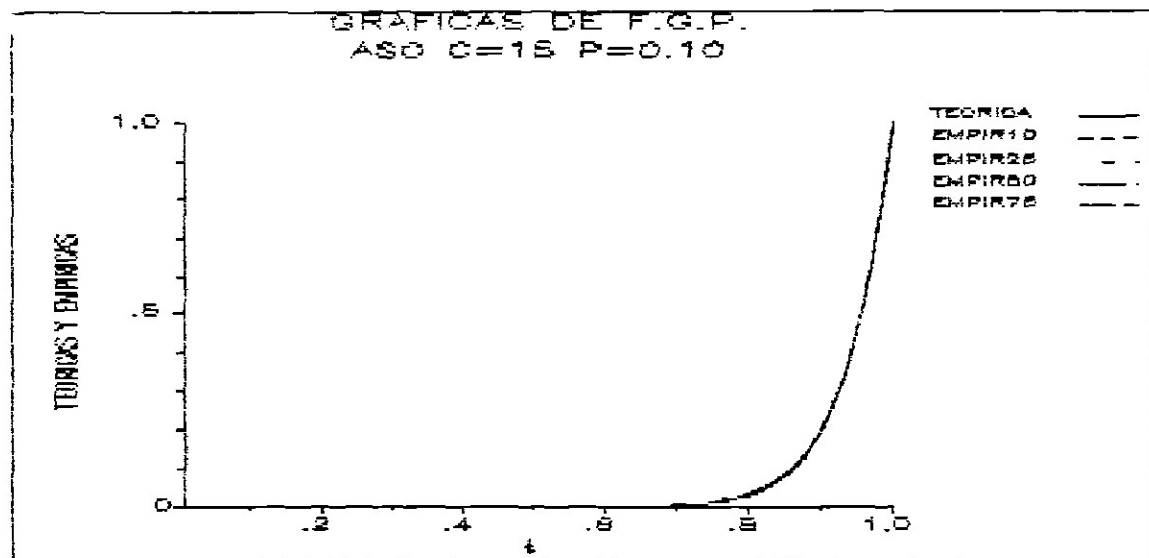


Fig # 29

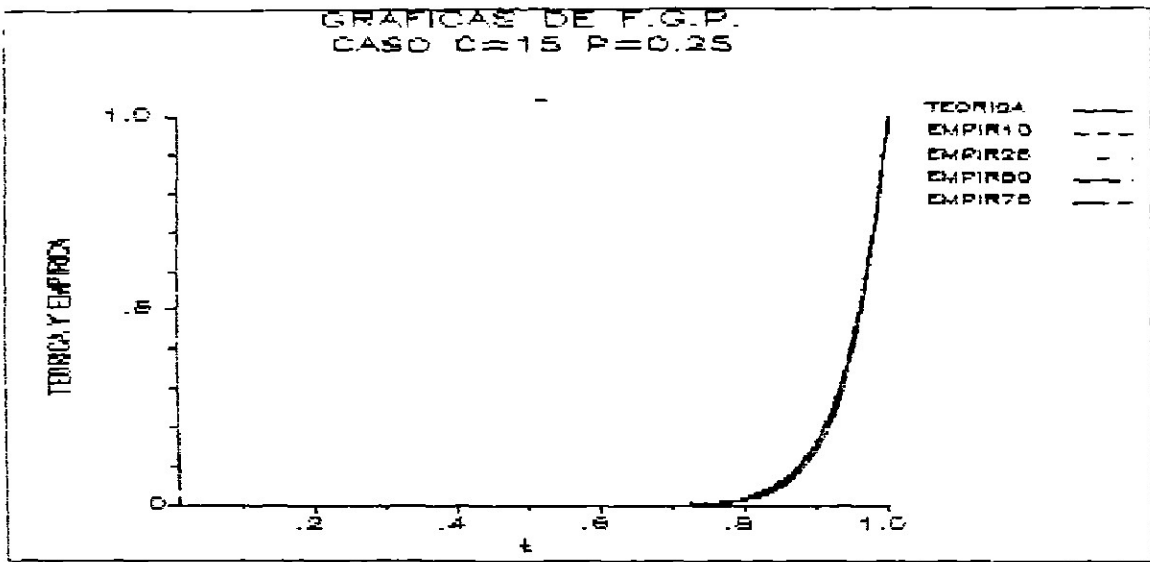


Fig # 30

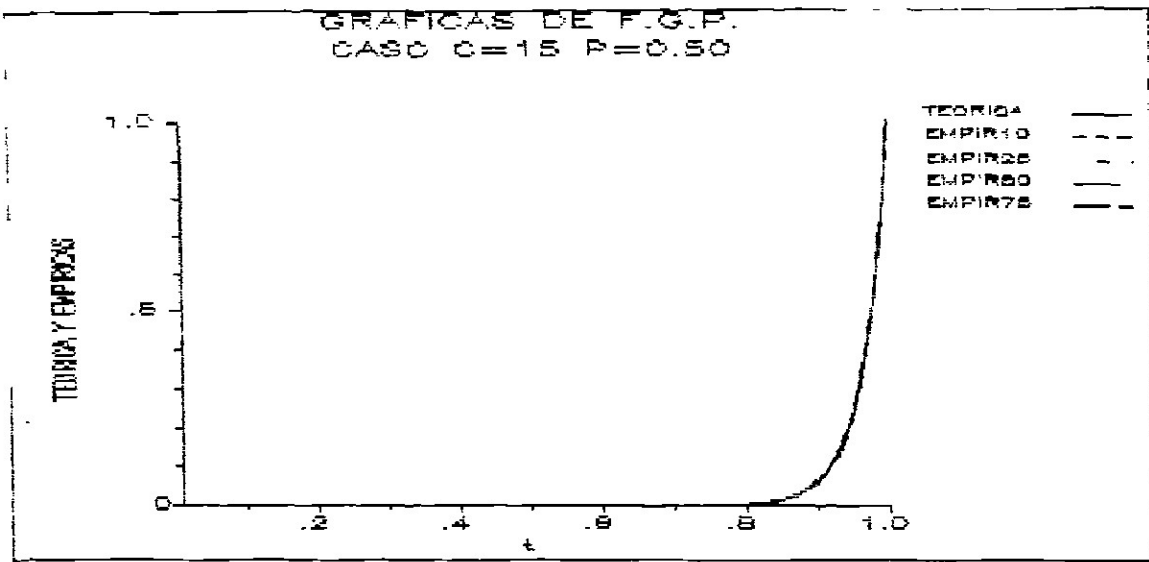


Fig # 31

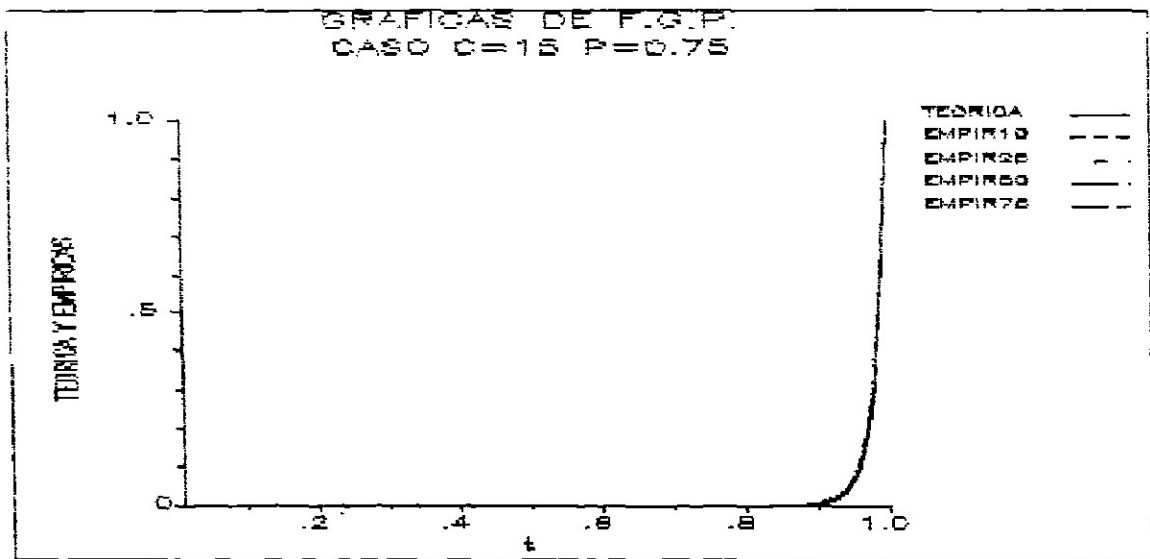


Fig # 32

## CAPITULO 3

### ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

En este capítulo se considera el modelo de daño acumulado del tipo diagonal, es decir, su MPT queda completamente especificada por su dimensión ( $c$ ), y su primera entrada ( $p$ ). Se obtienen primero algunas relaciones teóricas del modelo para la media y varianza. Después se definen dos métodos para estimar el valor de  $p$  y  $c$ , y por último se plantean algunos aspectos para ser investigados en un estudio de Monte Carlo.

#### 3.1 PROPIEDADES TEORICAS DEL MODELO

##### 3.1.1. MEDIA Y VARIANZA.

Para obtener las relaciones teóricas para la media y varianza de un tiempo de falla  $T$ , se usa el Teorema 2.2 sobre la función generatriz de probabilidades del modelo diagonal, de donde se tiene que:

$$\phi(z) = \frac{(c-1)q^{c-1}z^{c-2}}{(1-pz)^c}$$

y

$$\phi'(z) = \frac{(c-1)q^{c-1}z^{c-3}(c-2+2pz)}{(1-pz)^{c+1}}$$

Al evaluar en  $z=1$  y sustituir en los resultados del teorema resulta que:

$$E(T) = (c-1)(1+r)$$



y

$$\text{VAR}(T) = (c-1)(1+r)(r)$$

donde  $r = p/q$ .

Estas relaciones serán útiles en uno de los métodos que se desarrollan en la siguiente sección. Una verificación empírica de estos resultados se aprecia en las Figuras 1.16 a 1.27, pues las medias y varianzas muestrales de los datos simulados se encuentran próximas a los valores teóricos, sobre todo para valores grandes de  $n$ .

En las Figuras 3.1 y 3.2 se muestran las gráficas de la media y la varianza teóricas respectivamente para los valores de  $c = 3, 8$  y  $15$ , y los valores de  $p$  en el intervalo  $(0,1)$ .

Por otra parte, como se obtuvo anteriormente, la FGP de este tipo de modelos de daño acumulado corresponde a la de una variable aleatoria con distribución Binomial Negativa; en la siguiente sección se muestra cuál es la forma de dicha distribución.

### 3.1.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

Hasta ahora, de acuerdo a los resultados que se han obtenido respecto a los modelos diagonales, se tiene que para una variable aleatoria del tipo que resulta del modelo, su FGP corresponde a una *Binomial Negativa* que tiene una densidad de la siguiente forma (ver [6]):

$$\text{Pr}(T=x) = \begin{cases} \binom{x-1}{x-c+1} p^{x-c+1} q^{c-1}, & \text{si } x \geq c-1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < c-1 \end{cases}$$

Para la función de distribución que corresponde a esta densidad discreta, se adoptará la notación  $P(T \leq x) = F_{c,p}(x)$ . Se obtiene entonces que la función de distribución de la variable aleatoria  $T$  es la siguiente:

$$F_{c,p}(x) = \begin{cases} \sum_{k=c-1}^x \binom{k-1}{k-c+1} p^{k-c+1} q^{c-1}, & \text{si } x \geq c-1 \\ 0 & \text{, si } 0 \leq x < c-1 \end{cases}$$

Nótese que la función de densidad toma el valor de 0 para  $x < c-1$ , y esto se debe a que no puede alcanzarse el estado de falla  $c$  desde el estado 1 en un tiempo menor, dado que solo se puede pasar de un estado al siguiente superior.

### 3.1.3. SESGO.

El coeficiente de sesgo es una medida de asimetría de una distribución de probabilidad con respecto a su dispersión. En términos de valores esperados se expresa como:

$$\text{Coeficiente de sesgo } (X) = \frac{E(X - E(X))^3}{\sigma^3}$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza de  $X$ .

Para el caso de un modelo diagonal, utilizando la función generatriz de probabilidades, se obtiene la siguiente relación para el coeficiente de sesgo:

$$\text{Coef. de sesgo}(T) = (c-1) \left\{ \frac{1}{q \sqrt{(c-1)(1/q)}} \right\}^3 \left\{ 2 - 3q + q^2 \right\},$$

ya que la expresión del tercer momento central en términos de la

función generatriz de probabilidades esta dado por:

$$E(T-E(T))^3 = \phi'''(1) + 3\phi''(1)\phi'(1) - 3(\phi''(1))^2 - 3(\phi'(1))^2 + 2(\phi'(1))^3.$$

Por lo cual se afirma que el coeficiente de sesgo es siempre positivo, y para ello se muestra en la figura 3.3 la gráfica del mismo para los valores de  $c = 3, 8$  y  $15$ , donde  $q=1-p$  y el valor de  $p$  se toma en el intervalo  $(0,1)$ .

Sea  $T_1, T_2, \dots, T_n$  un conjunto de observaciones independientes de los aquí descritos para tiempos de falla. Lo que ahora interesa es ajustar un modelo que describa el comportamiento de estos datos. Por ajustar un modelo, se entiende suponer que los datos provienen de un modelo diagonal y estimar los valores de  $c$  y  $p$ , número de estados y valor de la probabilidad respectivamente. Las estimaciones, a su vez, describirán la función de distribución estimada de la variable  $T$ .

Se mencionó que existen dos posibles maneras para estimar los valores de  $p$  y  $c$ : el método de momentos, sugerido en [3] y el método de las FGP, cuya viabilidad se establece en el presente trabajo. En cualquier caso, se obtiene también una estimación inmediata para la función de distribución al sustituir en la expresión para  $F_{c,p}(x)$  las estimaciones correspondientes de  $c$  y  $p$ . Por otra parte, también se tienen estimaciones inmediatas para  $E(T)$  y  $VAR(T)$ :

$$\hat{E}(T) = (\hat{c}-1)(1+\hat{r}) \quad \text{y} \quad \hat{VAR}(T) = (\hat{c}-1)(1+\hat{r})(\hat{r}),$$

donde  $\hat{r} = \hat{p}/(1-\hat{p})$ .

Cabe mencionar que el método de máxima verosimilitud para estimar  $c$  y  $p$  no es aplicable a este caso debido a que las suposiciones usuales para que este método sea consistente (y asintóticamente normal) no se cumplen. En particular, el soporte

de los tiempos de falla está acotado por debajo por  $c-1$  (no puede llegarse al estado  $c$  en menos de  $c-1$  pasos), y éste depende de los parámetros. Si  $c$  fuese conocido, entonces el estimador de máxima verosimilitud para  $p$  sí sería consistente y asintóticamente eficiente. Sin embargo, el problema más realista en una aplicación es estimar  $p$  y  $c$  simultáneamente.

### 3.2. METODO DE MOMENTOS

Supóngase que se tienen  $n$  observaciones independientes de tiempos de falla,  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . El método consiste en estimar la media y la varianza de los datos,  $\hat{m}_n$  y  $\hat{v}_n$  respectivamente, y después sustituir estas en las relaciones teóricas de la media y varianza obtenidas en la sección 3.1.1. . Con esto se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas y resolviendo se tiene que:

$$\hat{p}_n = \frac{\hat{v}_n}{\hat{m}_n + \hat{v}_n},$$

$$\hat{q}_n = 1 - \hat{p}_n$$

y

$$\hat{c}_n = (\hat{m}_n)(\hat{q}_n) + 1.$$

El hecho de que este método es consistente, es decir, que  $\hat{p}_n \rightarrow p$  y  $\hat{c}_n \rightarrow c$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , radica en el hecho de que se elijan estimadores consistentes de ECTD y VARCTD. Bajo la

elección  $\hat{m}_n = \bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$  y  $\hat{v}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T}_n)^2$  se tiene que  $\hat{m}_n \rightarrow ECTD$  y  $\hat{v}_n \rightarrow VARCTD$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Nótese que con los valores de  $\hat{c}_n$  y  $\hat{p}_n$  por el método de momentos se obtienen los estimadores de  $\hat{E}CTD = \bar{T} = \hat{m}_n$  y

$$\widehat{\text{VARCTD}} = \widehat{v}_n.$$

A continuación se muestra el segundo método, basado en la FGP y la FGPE, que aquí se denomina el método de la FGP.

### 3.2.2. MÉTODO DE LA FGP

Similarmente, se dispone de un conjunto de  $n$  datos (tiempos de falla). Primero se eligen dos valores arbitrarios de  $z$  en el intervalo  $(0,1)$ ,  $z_1$  y  $z_2$ , con  $z_1 < z_2$ . Enseguida se evalúa la FGPE  $\phi_n(z)$  en los dos valores de  $z$  con los tiempos de falla dados, de donde se obtienen los valores  $\phi_n(z_1)$  y  $\phi_n(z_2)$ . Al sustituir los valores por parejas, es decir  $z_1$  y  $\phi_n(z_1)$ , en la FGP, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas, las cuales son las siguientes:

$$\phi_n(z_1) = \left[ \frac{(1-p)z_1}{1-pz_1} \right]^{c-1} \quad \text{y} \quad \phi_n(z_2) = \left[ \frac{(1-p)z_2}{1-pz_2} \right]^{c-1}.$$

Se propone que las estimaciones de  $p$  y  $c$  sean los valores que resuelven este sistema de ecuaciones.

Al resolver para  $p$  nos queda la siguiente ecuación:

$$(1-p) \ln \left( \frac{\phi_n(z_1)}{\phi_n(z_2)} \right) \left[ \frac{z_2}{1-pz_2} \right]^{\ln \phi_n(z_1)} - \left[ \frac{z_1}{1-pz_1} \right]^{\ln \phi_n(z_2)} = 0,$$

la cual es necesario resolver por métodos numéricos. En este trabajo se resolvió por el método de bisección. Ahora, para encontrar el valor de  $c$ , solo se toma cualquiera de las dos ecuaciones, se resuelve para ella y se encuentra que

$$\hat{c}_n = \frac{\ln \phi_n(z_1)}{\left[ \frac{(1-\hat{p}_n)z_1}{1-\hat{p}_n z_1} \right]} + 1.$$

Con esto se estiman los valores de  $p$  y  $c$ , y por tanto se conoce el modelo estimado del cual provienen los datos, es decir se conoce una estimación a la función de distribución.

Cuando se estiman  $c$  y  $p$  por el método de la FGP y se utilizan para estimar  $E(T)$  y  $VAR(T)$  por sustitución en las expresiones teóricas, no necesariamente se tendrá  $\hat{E}(T) = \hat{m}_n$  y  $\hat{VAR}(T) = \hat{v}_n$  como sucede con el método de momentos. Más aún, claramente, las estimaciones  $\hat{c}$  y  $\hat{p}$  dependen de la elección arbitraria de  $z_1$  y  $z_2$ . Es preciso determinar si existe una elección del par  $(z_1, z_2)$  que sea más favorable que otras en el sentido de que produzca estimaciones más eficientes. En el estudio de simulación de la siguiente sección, se pretende estudiar este último concepto.

Los estimadores  $\hat{p}_n$  y  $\hat{c}_n$  por el método de la FGP, al igual que por el método de momentos, también son consistentes. Esto se establece a partir del hecho que para cualquier selección de  $(z_1, z_2)$ , siempre se tiene  $\phi_n(z_1) \rightarrow \phi(z_1)$  y  $\phi_n(z_2) \rightarrow \phi(z_2)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , como lo establece la Proposición 2.1 .

### 3.4 ESTUDIO MONTE CARLO

Esta simulación se concentra en los modelos diagonales y contiene casi todo el material del que se ha hablado en el trabajo. El programa que se escribió consta del siguiente algoritmo:

- (a) Leer el número de estados de la matriz,  $c$ .
- (b) Leer el valor de la probabilidad,  $p$ .
- (c) Calcular los valores teóricos de la media y la varianza.
- (d) Leer los siguientes parámetros:
  - $n$  : tamaño de la muestra de tiempos de falla a generar,
  - $z_1$  y  $z_2$  : valores que se usan en el método de la FGP.
- (e) Iniciar un ciclo de 2000 iteraciones que consta de:
  - (1) Generar  $n$  tiempos de falla,
  - (2) Calcular la media y varianza de los tiempos simulados,
  - (3) Estimar parámetros por el método de momentos y guardarlos,
  - (4) Estimar parámetros por el método de la FGP y también guardarlos.

Se estimaron 2000 valores de  $\hat{p}_n$  y  $\hat{c}_n$  por ambos métodos.

- (f) Calcular la media y la varianza de las 2000 estimaciones que se hicieron de cada parámetro por ambos métodos.
- (g) Calcular el coeficiente de correlación de  $\hat{p}_n$  y  $\hat{c}_n$  por los dos métodos.

El criterio usado para cuantificar el desempeño de cada estimador fué el Error Cuadrático Medio (ECM), definido por:

$$ECM(\hat{p}_n) = |\text{sesgo}(\hat{p}_n)|^2 + VAR(\hat{p}_n) = \{E(\hat{p}_n - p)\}^2 + VAR(\hat{p}_n)$$

(similarmente para  $\hat{c}_n$ ). Con el método Monte Carlo se obtienen estimaciones de  $E(\hat{p}_n)$  y  $VAR(\hat{p}_n)$ , las cuales permiten estimar  $ECM(\hat{p}_n)$ . Cuando  $n \rightarrow \infty$ , se espera  $\text{sesgo}(\hat{p}_n) \rightarrow 0$ .

A continuación se resumen los resultados de las simulaciones que se realizaron en las Tablas 3.2 a 3.7. Se variaron los siguientes parámetros de entrada (Tabla 3.1):

- 1) El número de estados ( $c$ ).
- 2) El valor de la probabilidad ( $p$ ).

- 3) El tamaño de la muestra de tiempos de falla ( $n$ ).
- 4) Los valores de  $z_1$  y  $z_2$ .

TABLA 3.1

TABLA DE PARAMETROS	
Número de estados ( $c$ )	3, 8 y 15
Probabilidad ( $p$ )	0.10, 0.25, 0.50 y 0.75
# de tiempos de falla ( $n$ )	10, 25, 50 y 75
Valor de $(z_1, z_2)$	(0.15, 0.20), (0.45, 0.55), (0.20, 0.80), (0.85, 0.95), (0.990, 0.995)

Con esta elección de parámetros, se pretende abarcar una gama amplia de distintas MPT de tipo diagonal así como distintos tamaños de muestra. En cuanto a la elección de  $(z_1, z_2)$ , fue importante explorar tanto parejas "cercanas entre sí" como "lejanas entre sí" en todo el rango (0,1) con el objeto de determinar si existe alguna pareja que sea favorable para la estimación por el método de la FGP.

En las tablas, se reportan  $ECM(\hat{p})$ ,  $ECM(\hat{c})$ ,  $\hat{E}(\hat{p})$  y  $\hat{E}(\hat{c})$  para cada una de las configuraciones de los parámetros.

Las conclusiones y observaciones se posponen para el Capítulo 4.



TABLA # 3.2 NUMERO DE ESTADOS C = 3

n=10 $z_1, z_2$	p=0.10	p=0.25	p=0.50	p=0.75
0.15	0.9027 3.0116	0.2254 3.0501	0.4522 3.1458	0.6984 3.3440
0.20	0.0967 3.0044	0.2445 3.0180	0.4730 3.0828	0.6024 3.5644
0.45	0.0907 3.0120	0.2206 3.0486	0.4492 3.1620	0.6965 3.3461
0.55	0.0918 3.0121	0.2271 3.0378	0.4649 3.1136	0.6825 3.3872
0.20	0.0921 3.0123	0.2240 3.0502	0.4482 3.1587	0.7023 3.3169
0.80	0.0936 3.0106	0.2322 3.0323	0.4647 3.1049	0.6788 3.4557
0.85	0.0874 3.0134	0.2238 3.0487	0.4480 3.1691	0.6974 3.3357
0.95	0.0817 3.0267	0.2131 3.0781	0.4394 3.2041	0.6986 3.3286
0.990	0.0907 3.0130	0.2231 3.0465	0.4528 3.1548	0.6974 3.3341
0.995	0.0830 3.0309	0.2070 3.0905	0.4300 3.2468	0.6788 3.4797
n=25	0.0962 3.0053	0.2369 3.0251	0.4783 3.0667	0.7298 3.1328
	0.0992 3.0015	0.2480 3.0051	0.4928 3.0214	0.7021 3.1952
	0.0954 3.0064	0.2381 3.0189	0.4777 3.0760	0.7296 3.1435
	0.0965 3.0051	0.2411 3.0136	0.4875 3.0418	0.7279 3.1265
	0.0975 3.0046	0.2403 3.0209	0.4776 3.0712	0.7289 3.1373
	0.0981 3.0038	0.2450 3.0108	0.4894 3.0298	0.7276 3.1311
	0.0958 3.0065	0.2407 3.0167	0.4754 3.0762	0.7283 3.1543
	0.0934 3.0120	0.2364 3.0283	0.4738 3.0827	0.7317 3.1302
0.0955 3.0051	0.2387 3.0213	0.4788 3.0662	0.7309 3.1181	
0.0922 3.0126	0.2318 3.0397	0.4698 3.1025	0.7244 3.1692	
n=50	0.0979 3.0020	0.2437 3.0113	0.4884 3.0413	0.7364 3.0944
	0.0991 3.0006	0.2485 3.0028	0.4983 3.0096	0.7349 3.0720
	0.9757 3.0018	0.2431 3.0131	0.4877 3.0353	0.7397 3.0673
	0.0978 3.0018	0.2462 3.0068	0.4926 3.0193	0.7399 3.0497
	0.0978 3.0024	0.2418 3.0173	0.4900 3.0323	0.7393 3.0699
	0.0983 3.0018	0.2461 3.0076	0.4943 3.0166	0.7391 3.0627
	0.0979 3.0035	0.2458 3.0085	0.4879 3.0359	0.7390 3.0732
	0.0967 3.0062	0.2438 3.0140	0.4876 3.0375	0.7411 3.0576
0.0977 3.0027	0.2455 3.0054	0.4861 3.0407	0.7385 3.0812	
0.0960 3.0066	0.2419 3.0148	0.4816 3.0586	0.7355 3.1050	
n=75	0.0985 3.0024	0.2449 3.0104	0.4894 3.0371	0.7420 3.0489
	0.0999 3.0006	0.2495 3.0016	0.4997 3.0069	0.7413 3.0350
	0.0973 3.0036	0.2460 3.0062	0.4919 3.0246	0.7421 3.0532
	0.0981 3.0021	0.2474 3.0036	0.4953 3.0130	0.7427 3.0390
	0.0979 3.0027	0.2468 3.0060	0.4926 3.0276	0.7416 3.0601
	0.0986 3.0015	0.2483 3.0028	0.4976 3.0098	0.7438 3.0395
	0.0980 3.0010	0.2461 3.0088	0.4905 3.0294	0.7436 3.0458
	0.0971 3.0029	0.2450 3.0118	0.4909 3.0281	0.7449 3.0362
0.0993 3.0012	0.2461 3.0096	0.4920 3.0280	0.7425 3.0477	
0.0981 3.0038	0.2438 3.0159	0.4890 3.0399	0.7405 3.0633	

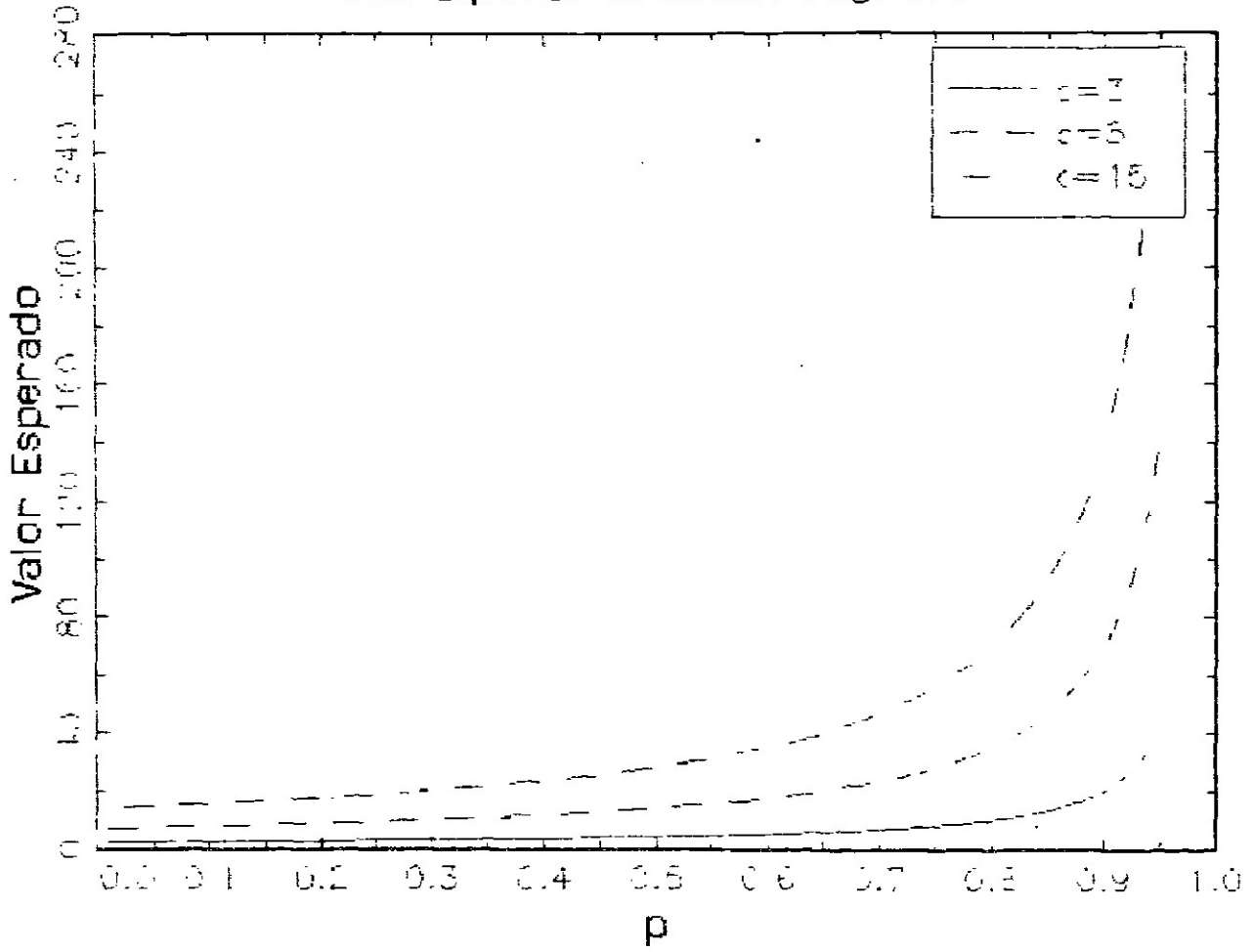
**TABLA # 3.3 NUMERO DE ESTADOS C = 8**

n=10	0.0940 8.0272	0.2326 8.1262	0.4644 8.4538	0.7144 8.9398
	0.0973 8.0224	0.2201 8.2113	0.2841 9.9351	0.2175 16.593
	0.0967 8.0092	0.2368 8.1008	0.4665 8.4302	0.7105 9.0357
	0.0941 8.0348	0.2270 8.1919	0.4024 9.1132	0.4323 14.162
	0.0961 8.0296	0.2290 8.1578	0.4626 8.4553	0.7162 8.8876
	0.0949 8.0434	0.2222 8.2263	0.3929 9.3008	0.4603 14.306
	0.0951 8.0146	0.2340 8.1120	0.4649 8.4425	0.7132 8.9489
	0.0881 8.0697	0.2215 8.2300	0.4502 8.6497	0.6963 9.4068
	0.0957 8.0248	0.2331 8.1402	0.4697 8.3829	0.7096 9.0522
	0.0874 8.0907	0.2161 8.2998	0.4463 8.7101	0.6912 9.5657
n=25	0.0965 8.0157	0.2435 8.0525	0.4867 8.1629	0.7353 8.3780
	0.0989 8.0076	0.2427 8.0658	0.3727 9.0266	0.3207 14.036
	0.0993 8.0079	0.2431 8.0519	0.4886 8.1441	0.7344 8.3966
	0.0977 8.0155	0.2419 8.0661	0.4571 8.4658	0.5509 11.550
	0.0979 8.0168	0.2436 8.0486	0.4889 8.1374	0.7380 8.3166
	0.0980 8.0180	0.2405 8.0782	0.4472 8.6307	0.5623 11.945
	0.0983 8.0141	0.2453 8.0325	0.4831 8.2104	0.7360 8.3624
	0.0956 8.0351	0.2401 8.0814	0.4781 8.2814	0.7295 8.5387
	0.0981 8.0113	0.2439 8.0522	0.4866 8.1672	0.7347 8.3772
	0.0947 8.0382	0.2368 8.1185	0.4774 8.2962	0.7282 8.5590
n=50	0.0993 8.0048	0.2478 8.0182	0.4941 8.0805	0.7438 8.1641
	0.1001 8.0029	0.2467 8.0296	0.4225 8.6014	0.3911 12.750
	0.0989 8.0069	0.2483 8.0144	0.4911 8.1093	0.7432 8.1667
	0.0988 8.0091	0.2464 8.0324	0.4789 8.2271	0.6131 10.345
	0.0979 8.0093	0.2466 8.0247	0.4913 8.1073	0.7422 8.1796
	0.0981 8.0091	0.2457 8.0341	0.4724 8.3279	0.6146 10.778
	0.0997 8.0002	0.2466 8.0326	0.4956 8.0565	0.7420 8.1956
	0.0982 8.0117	0.2443 8.0545	0.4920 8.1061	0.7400 8.2524
	0.0998 8.0009	0.2459 8.0290	0.4929 8.0878	0.7422 8.2013
	0.0999 8.0035	0.2424 8.0622	0.4882 8.1522	0.7390 8.2915
n=75	0.0990 8.0053	0.2480 8.0108	0.4961 8.0418	0.7444 8.1455
	0.0999 8.0026	0.2475 8.0177	0.4461 8.4060	0.4292 12.123
	0.0988 8.0056	0.2481 8.0151	0.4954 8.0607	0.7449 8.1232
	0.0987 8.0072	0.2477 8.0199	0.4831 8.1837	0.6415 9.8421
	0.0990 8.0011	0.2475 8.0181	0.4964 8.0413	0.7457 8.1179
	0.0988 8.0035	0.2469 8.0241	0.4812 8.2200	0.6415 10.236
	0.0998 8.0003	0.2465 8.0230	0.4958 8.0412	0.7444 8.1427
	0.0988 8.0082	0.2451 8.0365	0.4944 8.0632	0.7422 8.1999
	0.1001 8.0026	0.2468 8.0242	0.4951 8.0608	0.7463 8.0949
	0.0999 8.0117	0.2444 8.0464	0.4920 8.1033	0.7443 8.1529

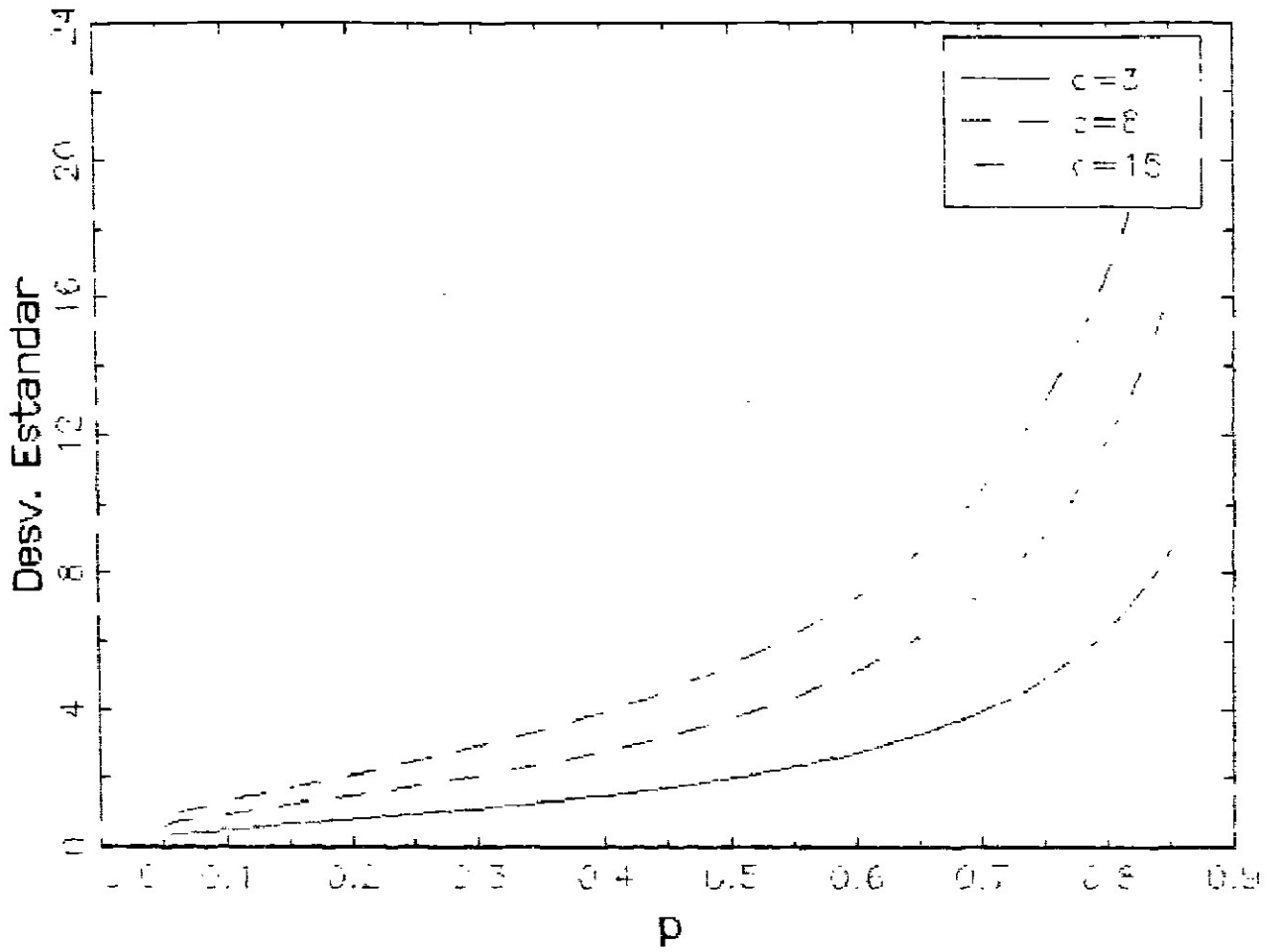
TABLA # 3.4 NUMERO DE ESTADOS C = 15

n=10	0.0952 15.041	0.2313 15.313	0.4613 15.967	0.7141 15.959
	0.0924 15.099	0.1588 15.189	0.1615 21.247	0.1028 38.732
	0.0956 15.049	0.2369 15.222	0.4772 15.655	0.7150 16.820
	0.0919 15.113	0.2088 15.676	0.3078 19.252	0.2626 34.450
	0.0970 15.046	0.2365 15.200	0.4718 15.731	0.7134 16.982
	0.0928 15.117	0.2004 15.820	0.3093 19.588	0.3047 34.591
	0.0938 15.080	0.2431 15.145	0.4749 15.667	0.7121 17.226
	0.0871 15.186	0.2292 15.407	0.4568 16.181	0.6659 19.730
0.0968 15.019	0.2342 15.260	0.4692 15.810	0.7105 17.128	
0.0883 15.152	0.2170 15.581	0.4460 16.459	0.6919 18.164	
n=25	0.0989 15.007	0.2457 15.065	0.4904 15.227	0.7347 15.823
	0.0982 15.026	0.2021 15.574	0.2232 19.661	0.1528 34.565
	0.0990 15.004	0.2461 15.067	0.4884 15.321	0.7389 15.595
	0.0973 15.033	0.2349 15.242	0.3798 17.549	0.3562 29.650
	0.1003 14.995	0.2464 15.055	0.4861 15.362	0.7356 15.774
	0.0979 15.033	0.2290 15.348	0.3772 17.909	0.3994 29.745
	0.0992 15.009	0.2444 15.087	0.4907 15.243	0.7349 15.815
	0.0963 15.055	0.2392 15.185	0.4827 15.467	0.7148 16.868
0.0989 15.017	0.2464 15.055	0.4880 15.316	0.7375 15.686	
0.0954 15.071	0.2392 15.199	0.4787 15.577	0.7309 16.056	
n=50	0.0999 14.998	0.2468 15.053	0.4928 15.198	0.7443 15.303
	0.0992 15.012	0.2254 15.291	0.2715 18.663	0.1934 31.883
	0.0990 15.016	0.2472 15.045	0.4932 15.175	0.7423 15.418
	0.0989 15.021	0.2411 15.141	0.4223 16.587	0.4202 26.813
	0.0994 15.008	0.2484 15.027	0.4923 15.198	0.7430 15.380
	0.0985 15.020	0.2399 15.170	0.4110 17.084	0.4533 26.838
	0.0992 15.010	0.2474 15.040	0.4939 15.155	0.7430 15.373
	0.0979 15.031	0.2447 15.090	0.4901 15.260	0.7332 15.888
0.0991 15.014	0.2489 15.018	0.4926 15.195	0.7435 15.364	
0.0974 15.041	0.2453 15.086	0.4880 15.323	0.7402 15.545	
n=75	0.0992 15.006	0.2497 14.997	0.4959 15.099	0.7457 15.235
	0.0994 15.007	0.2333 15.188	0.2951 19.155	0.2188 30.510
	0.0991 15.010	0.2498 15.006	0.4958 15.106	0.7459 15.222
	0.0991 15.012	0.2449 15.081	0.4398 16.214	0.4579 25.161
	0.0992 15.009	0.2480 15.026	0.4948 15.135	0.7443 15.306
	0.0991 15.012	0.2426 15.118	0.4285 16.673	0.4897 25.706
	0.0997 15.001	0.2472 15.042	0.4956 15.123	0.7453 15.261
	0.0988 15.051	0.2454 15.075	0.4938 15.171	0.7369 15.697
0.0994 15.010	0.2489 15.018	0.4965 15.093	0.7460 15.209	
0.0982 15.028	0.2465 15.061	0.4934 15.179	0.7440 15.324	

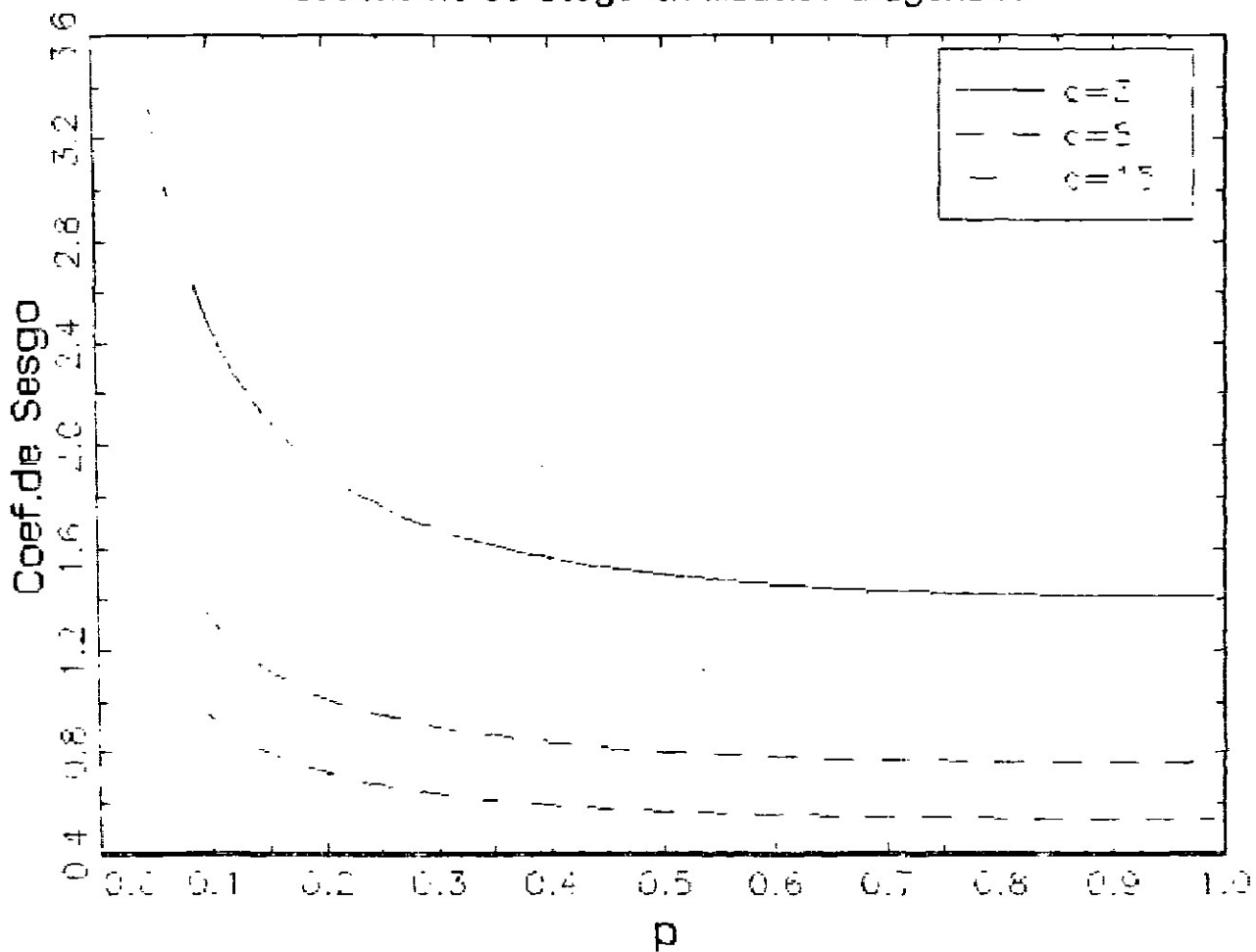
### Valor Esperado en Modelos Diagonales



### Desviación Estándar en Modelos Diagonales



### Coeficientes de Sesgo en Modelos Diagonales



## CAPITULO 4

### CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

#### 4.1 OBSERVACIONES GENERALES

En este capítulo se resumen las conclusiones generales acerca del problema que se estudió en este trabajo. Conforme a los Capítulos 1-3, el proyecto se organizó en tres partes principales:

(1) Considerar modelos para daño acumulado basados en cadenas de Markov de los tipos denominados "diagonales" y "no-diagonales", para determinar cuáles son las diferencias cualitativas entre ambos tipos,

(2) Calcular la función generatriz de probabilidades para ambos tipos de modelo y observar la velocidad de convergencia de las funciones generatrices empíricas, y

(3) Estudiar un método de estimación basado en la FGPE y compararlo con el método de momentos en un estudio Monte Carlo.

##### 4.1.1. MODELOS DIAGONALES Y NO DIAGONALES

En las Figuras 1.1 a 1.27 se presentaron histogramas contruidos con 2000 datos simulados provenientes de ambos modelos para distintas configuraciones de parámetros. Salta a la vista el que las densidades de los tiempos de falla son siempre sesgadas a la derecha, y que al aumentar el valor del parámetro  $c$ , tienden a volverse simétricas, independientemente del valor de

la matriz de probabilidades de transición,  $P$ . Esta observación corresponde al resultado descrito en la Sección 3.1.3 acerca del coeficiente de sesgo. Un aspecto importante es que estas mismas particularidades se presentan tanto en los modelos diagonales como en los no-diagonales, lo cual tiene implicaciones importantes. Aparentemente, el hecho de aumentar la complejidad de la MPT no hace que los tiempos de falla adquieran características adicionales. Se observa que la naturaleza de las densidades (vista a través de los histogramas) no cambia bruscamente al pasar de un modelo a otro. Estrictamente hablando, los modelos diagonales y no-diagonales son distintos en cuanto a las distribuciones que generan, pero se concluye que en la práctica pueden aproximarse bien los modelos no-diagonales con un modelo diagonal, el cual en general posee un número menor de parámetros.

De hecho, se encontró que si se estiman los parámetros  $c$  y  $p$  de un modelo diagonal a partir de datos generados bajo un modelo no-diagonal, se obtiene un ajuste a la función de distribución que no resulta ser evidentemente inadecuado. El modelo diagonal es, en la terminología usual, más *parsimonioso* (que tiene un número menor de parámetros) y por lo tanto es preferible sobre un modelo no-diagonal. El alcance del presente trabajo no permite hacer una conclusión similar en cuanto a MPT más generales que tienen entradas distintas de cero en un número mayor de posiciones.

También debe remarcarse que estos modelos son inadecuados cuando los datos muestran sesgo negativo. Según los resultados descritos en la Sección 3.1.3, el sesgo que resulta de estos modelos es siempre positivo si  $q < 1$ . Una posibilidad para datos  $T_1, \dots, T_n$  que muestran sesgo negativo es ajustar el modelo a  $C-T_1, \dots, C-T_n$ , donde  $C$  es una constante mayor que todas las observaciones. Sin embargo, es sabido que la mayoría de las



aplicaciones dan lugar a datos que poseen sesgo positivo y no será necesaria la elección de la constante arbitraria  $C$ .

En las Figuras 1.1 a 1.27 también se verifican los resultados teóricos obtenidos en la Sección 3.1.1 acerca de la media y la varianza de los tiempos de falla. Por ejemplo, para  $c = 8$  y  $p = .75$  (Figura 1.23) se obtienen los valores 28 y 84 para la media y la varianza, respectivamente, mientras que los resultados muestrales son 28.236 y 86.084 para estos conceptos.

#### 4.1.2. LAS FGP Y LAS FGPE

En el Capítulo 2 (Figuras 2.1 a 2.32) se graficaron FGP (teóricas) para ambos tipos de modelos de daño acumulado basados en cadenas de Markov. Utilizando estos instrumentos, también se confirma la aseveración hecha con respecto a las gráficas del Capítulo 1: no existe diferencia notoria entre el comportamiento genérico de las FGP para MPT diagonales y no-diagonales. Una característica interesante hubiese sido, por ejemplo, que las FGP para modelos diagonales resultaran cóncavas mientras que las FGP de los modelos no-diagonales fuesen convexas; con esta observación, las FGP podrían utilizarse como instrumento para identificar los modelos. Sin embargo, no se presentó dicha situación. Las formas son similares y las variaciones se deben a las distintas configuraciones de parámetros; las diferencias estriban en la pendiente de la función en distintas zonas del intervalo  $(0,1)$ . Por ejemplo, en el caso de los modelos diagonales para  $c = 3$  y  $p = 0.10$  (Fig. 2.21), la FGP comienza a crecer relativamente pronto, mientras que para  $c = 15$  y  $p = 0.75$  (Fig. 2.32), la FGP se mantiene chica por mayor tiempo antes de crecer.

El entendimiento del comportamiento de las FGP en el rango

(0,1) es importante para el método de estimación por la FGPE descrita en el Capítulo 3. Para ejecutar dicho método, deben seleccionarse dos valores arbitrarios  $z_1$  y  $z_2$  en (0,1), y cabe esperarse que habrá diferencias al cambiar las selecciones de estos dos números (véase la Sección 4.1.3).

En las Figuras 2.7 a 2.32 se varían los tamaños de muestra para una configuración fija de los parámetros del modelo. Se grafican simultáneamente las FGPE para los distintos valores de  $n$  y puede observarse la convergencia uniforme (en  $z$ ) de la FGPE  $\phi_n(z)$  a la FGP  $\phi(z)$ . Cabe notar que dicha convergencia se verifica con rapidez. Con  $n = 75$  en la mayoría de los casos, la FGPE se encuentra ya muy próxima a la FGP. En efecto, para valores de  $z$  en el intervalo (0,0.5), las curvas son prácticamente indistinguibles.

#### 4.1.3 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN EL CASO DIAGONAL

Los métodos de estimación que se estudiaron son el método de momentos (MM) y el método de la función generatriz de probabilidades (MFGP). Interesa en esta sección, establecer si algún método tiene ventajas sobre el otro en términos de eficiencia, es decir, que la varianza de un método sea menor que la del otro (ya se sabe que ambos métodos son consistentes). Se comparan los errores cuadráticos medios de ambos métodos para estimar los parámetros  $p$  y  $c$ .

De las Tablas 3.1 a 3.3 se observa de inmediato que el MFGP puede llegar a ser mucho más eficiente que el MM. Por ejemplo, en el caso  $c = 8$  y  $p = 0.10$  (Tabla 3.2) se tiene que el MFGP gana en eficiencia 58.97% al estimar  $p$  y 97.25% al estimar  $c$ , con respecto al MM. Sin embargo, el MFGP no es uniformemente mejor que el MM. Más aún, en el caso del MFGP, es crítica la elección de la pareja

$(z_1, z_2)$ . En la Tabla 3.1 puede observarse que la elección  $(0.15, 0.20)$  dá lugar a buenas estimaciones de  $c$  y  $p$  mientras que la elección  $(0.990, 0.995)$  es desfavorable para estimar estos parámetros.

En la Sección 4.2, se ofrecen lineamientos para la elección de la pareja  $(z_1, z_2)$ , de tal manera que el MFGP ofrezca ventajas sobre el MM en muchos casos.

Cabe mencionar (Tablas 3.1 a 3.3) que el comportamiento relativo entre el MM y el MFGP, no depende del tamaño de muestra  $n$ . Es decir, si se recomienda uno de los dos métodos sobre el otro, esto se hace independientemente del tamaño de muestra. Una característica interesante es que en los casos donde el MFGP fué mejor que el MM, el aumento en el tamaño de muestra acentuá aún más la superioridad del MFGP.

En la práctica, será recomendable efectuar estimación por ambos métodos y observar si las funciones de distribución estimadas difieren radicalmente. Si se tiene la certeza de que el MFGP es más eficiente, entonces se preferirá dicha estimación sobre el MM. El estudio Monte Carlo expuesto en este trabajo abarcó una colección suficientemente amplia de distintas configuraciones de parámetros, lo cual permite seleccionar empíricamente los valores apropiados de  $(z_1, z_2)$  para los distintos valores de  $c$  y  $p$ . La Tabla 4.1 propone valores óptimos de  $(z_1, z_2)$  en función de  $p$  y  $c$ . En la práctica, se propone encontrar estimaciones de  $p$  y  $c$  por el MM y después utilizar la Tabla 4.1 para seleccionar los valores óptimos de  $(z_1, z_2)$  para posteriormente utilizar el MFGP. De acuerdo a los resultados del estudio Monte Carlo, puede esperarse que en la mayoría de los casos, este procedimiento producirá estimaciones más eficientes que el MM.

## 4.2 RECOMENDACIONES PRACTICAS

Ante un problema de daño acumulado que se preste a ser modelado a través de una cadena de Markov, se propone, primeramente, adoptar un modelo con MPI del tipo diagonal, que solamente depende de dos parámetros  $c$  y  $p$ . En base a las observaciones  $T_1, \dots, T_n$  se propone:

1. Obtener  $\hat{c}$  y  $\hat{p}$  por el método de momentos (ver la Sección 3.2).
2. En base a los valores estimados en (1), elegir una pareja  $(z_1, z_2)$  en base a la Tabla 4.1.
3. Estimar  $c$  y  $p$  ahora por el método de la FGPE (ver Sección 3.3), utilizando las constantes  $(z_1, z_2)$  de (2).

De acuerdo a el estudio Monte Carlo realizado en el presente trabajo, la segunda estimación es más eficiente que el método de momentos en muchos casos, y en el peor de los casos, la pérdida de eficiencia por utilizar el MFGP es aproximadamente del orden de 10%.

Tabla 4.1

Valores propuestos de $(z_1, z_2)$			
	$0 < p \leq 0.30$	$0.30 < p \leq 0.60$	$0.60 < p \leq 1$
$2 < c \leq 5$	0.15, 0.20	0.15, 0.20	0.85, 0.95
$5 < c \leq 8$	0.15, 0.20	0.85, 0.95	0.99, 0.995
$c > 8$	0.15, 0.20	0.85, 0.95	0.99, 0.995

#### 4.3 CONCEPTOS NO ABARCADOS EN EL PRESENTE TRABAJO

A pesar de que en este trabajo se estableció en forma definitiva que el MFGP puede ser un método eficiente para estimar parámetros, se debe mencionar que el ámbito de este trabajo no concluye de manera definitiva el estudio del MFGP en los modelos aquí descritos. En efecto, algunos puntos que podrían elaborarse más a fondo son los siguientes:

1. Utilización del método en problemas con un mayor número de parámetros, por ejemplo una MPT en la cadena de Markov con un mayor número de entradas desligadas.
2. Evaluación del MFGP ante fallas en las suposiciones, es decir, estudio de la robusticidad del método.
3. Obtención de la distribución asintótica del método, con el objeto de poder establecer pruebas de hipótesis e intervalos de confianza para los parámetros que se estiman.
4. Obtención de las propiedades teóricas del estimador de la función de distribución que resulta del método.
5. Obtención de las propiedades teóricas del método cuando los datos provienen de un modelo alternativo al que se supone.
6. Elección analítica de los valores óptimos de  $(z_1, z_2)$ .

## CAPITULO 5

### UNA APLICACIÓN A DATOS DE INGENIERÍA

En este capítulo se aplicarán los resultados mencionados en los cuatro capítulos anteriores a un conjunto de datos de daño acumulado proporcionado por la empresa Aeroméxico.

Los datos se refieren a la longitud de vida de conjuntos de frenos de la marca ABS instalados en aviones MD80. La variable es el número de aterrizajes que realizaron los aviones antes de ser necesario reemplazar los conjuntos de frenos, los cuales se desgastan con el uso. Se tuvieron registros de dicho número de aterrizajes en 16 casos:

NUMERO DE ATERRIZAJES			
1202	1176	1124	1210
1210	1110	1110	1124
1010	1094	1341	1108
1330	0942	1173	0942

Se pretende adoptar el modelo descrito, basado en una cadena de Markov con una matriz de probabilidades de transición del tipo "diagonal". Dicho modelo se especifica con los dos parámetros  $c$  y  $p$ . La estimación de estos dos parámetros permite calcular una función de distribución asociada a la longitud de vida de los conjuntos de frenos, la cual debe mostrar ventajas considerables sobre la función de distribución empírica de los datos, sobre

todo por el tamaño reducido de la muestra. Se recuerda que la función de distribución empírica está definida por

$$\hat{G}(x) = \frac{\text{número de } T_i \leq x}{n}$$

En la Figura 5.1, se presentan algunas estadísticas descriptivas de la muestra así como un histograma de los datos. En particular, como se describió en la Sección 3.2, los valores muestrales de la media y la varianza serán utilizados para estimar  $c$  y  $p$  por el método de momentos.

Los datos de este ejemplo son muy cercanos a ser simétricos, por lo que un modelo del tipo descrito es apropiado. A pesar de que el coeficiente de sesgo es (muy ligeramente) negativo, no se representa evidencia contundente de una cola pesada por el lado izquierdo de la distribución de longitudes de vida. De hecho, ya que la media es mayor que la mediana, podría pensarse que es la cola derecha la que es más pesada.

Las estimaciones de  $c$  y  $p$  por el método de momentos figuran a continuación:

<u>METODO DE MOMENTOS</u>		
PARÁMETROS	ESTIMADOS	
# de Estados	(c)	93
Probabilidad	(p)	0.918

Para seleccionar los valores de  $(z_1, z_2)$  que precisa el método de la FGP, se han utilizado las recomendaciones de la Tabla 4.1. Se incluye un par adicional con el objeto de hacer

comparaciones y observar la sensibilidad a la elección; los resultados de las estimaciones de  $c$  y  $p$  son los siguientes:

METODO DE LA FGP		
PARÁMETROS ESTIMADOS		
Valor de $(z_1, z_2)$	# de estados $c$	probabilidad $p$
(0.9900, 0.9950)	94	0.918
(0.9990, 0.9995)	97	0.914

Se observa que las estimaciones de  $c$  y  $p$  no son fuertemente afectadas por la segunda elección de  $(z_1, z_2)$ . En lo subsecuente, se toman como valores estimados por el método de la FGP los anotados en el primer renglón de la tabla anterior. Las funciones de distribución estimadas, así como la función de distribución empírica, se muestran en la Figura 5.2. En ella se puede observar que ambas funciones de distribución inherentes al modelo paramétrico se ajustan razonablemente bien a la función de distribución empírica, mientras que ambos métodos ciertamente dan lugar a una función de distribución distinta. Más precisamente, ambas funciones de distribución son semejantes en las colas, pero en sus partes centrales una domina a la otra. Por las razones expuestas en el Capítulo 4, la función de distribución correspondiente al método de la FGP es preferible, y esta última será denotada por  $\hat{F}_T(x)$ . Las estimaciones por el método de la FGP de media, varianza, y sesgo son como sigue:

VALORES ESTIMADOS	
MEDIA	1134.14
VARIANZA	12696.90
SESGO	0.207



El Departamento de Ingeniería de Mantenimiento informa que las unidades de freno son garantizadas por el fabricante por 1200 ciclos de uso. Conforme a la función de distribución estimada se encuentra que  $\hat{F}_T(1200) = 0.729$ , lo cual significa que la experiencia ha sido que las unidades de freno tienden a fallar mucho antes de vencerse el periodo de garantía. Cuando se consultó al Departamento para explicar dicha discrepancia, se informó que probablemente se debe a diferencias en las técnicas de vuelo en este país, así como a distintas condiciones en las pistas aéreas, más que a una política errónea del fabricante.

El conocimiento de la función de distribución estimada también permite estimar probabilidades condicionales. Supóngase, por ejemplo, que en un punto de inspección un conjunto de frenos ya ha durado 200 ciclos y se desea cuantificar la posibilidad de que dure otros 100 ciclos adicionales. En otras palabras, se desea la probabilidad de que  $T > 300$  dado que ya se observó que  $T > 200$ . La notación que se emplea para este concepto es  $\text{Pr}(T > 300 | T > 200)$ . En general, si un conjunto de frenos dura  $M$  ciclos sin fallar, la probabilidad condicional de que dure otros  $K$  ciclos adicionales es

$$\text{Pr}(T > M+K | T > M) = (1 - F_T(M+K)) / (1 - F_T(M)).$$

Esta cantidad representa una cuantificación de la certeza de que dure otros  $K$  ciclos adicionales, habiendo durado  $M$  ciclos sin fallar. El valor de  $K$  puede representar, por ejemplo, el número de aterrizajes que se programan antes de la siguiente inspección. Para una cuantificación del riesgo que se toma al dejar en su lugar dicha refacción, puede calcularse

$$\text{Pr}(T \leq M+K | T > M) = 1 - \text{Pr}(T > M+K | T > M),$$

lo cual mide la probabilidad de que un conjunto de frenos con  $M$  ciclos acumulados que no ha fallado, lo haga antes de cumplir otros  $K$  ciclos adicionales. En el caso particular  $K = 1$ , la fórmula anterior proporciona la probabilidad de que un conjunto de frenos que no ha fallado durante  $M$  ciclos, lo haga durante el siguiente ciclo de uso. Este último concepto se incorpora en la función  $R_T(M)$  definida para  $M = 1, 2, \dots$  por

$$R_T(M) = P(T \leq M+1 | T > M) = (F_T(M+1) - F_T(M)) / (1 - F_T(M)),$$

la cual se conoce como la Función de Riesgo (o Razón de Falla) asociada a la variable aleatoria  $T$ . En la Figura 5.3, se grafica la función  $R_T(M)$  estimada, es decir, la que se obtiene reemplazando  $F_T(M)$  por  $\hat{F}_T(M)$ . Se aprecia que el riesgo comienza a manifestarse significativamente a partir de 900 aterrizajes.

Para el Departamento de Mantenimiento, puede ser de interés diseñar una política de reemplazo como la siguiente. Supóngase que se desea establecer un número fijo de ciclos de uso,  $C$ , para instituir la política de que la unidad de frenos sea reemplazada cuando se cumplan  $C$  ciclos de uso, aunque no haya fallado aún en ese momento. Si se elige un valor muy grande de  $C$ , las unidades de frenos tenderán a desgastarse antes de cumplir  $C$  ciclos y tendrán que ser reemplazadas después de haber manifestado una falla, lo cual puede ser muy costoso en algunos casos. Por otra parte, si a  $C$  se le asigna un valor muy pequeño, se estarán reemplazando en forma innecesaria muchas unidades que potencialmente aún mantenían vida útil. Un criterio para determinar el valor de  $C$  consiste en fijar la proporción tolerable de piezas que fallen antes de ser reemplazadas, denotada aquí por  $\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$ . Sea  $C_\alpha$  un número tal que  $F_T(C_\alpha) = \alpha$ . Entonces, si se opta por el reemplazo de piezas al cumplir éstas  $C_\alpha$  ciclos de uso, solamente una proporción  $\alpha$  de los

conjuntos se desgastarán antes de su reemplazo programado. El valor  $C_\alpha$  recibe el nombre de  $\alpha$ -percentil de la función de distribución  $F_T$ . Una tabla de  $\alpha$ -percentiles se presenta a continuación:

PERCENTILES

$\alpha$	$\alpha$ -percentil
0.01	889
0.05	956
0.10	991
0.50	1130
0.75	1208

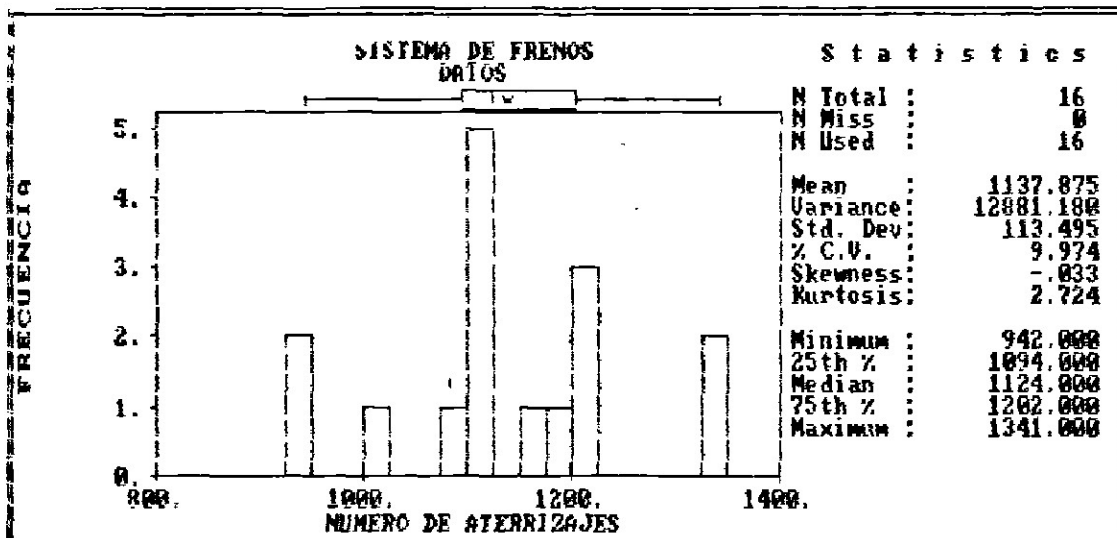


Fig 5.1

# FUNCIONES DE DISTRIBUCION ESTIMADAS

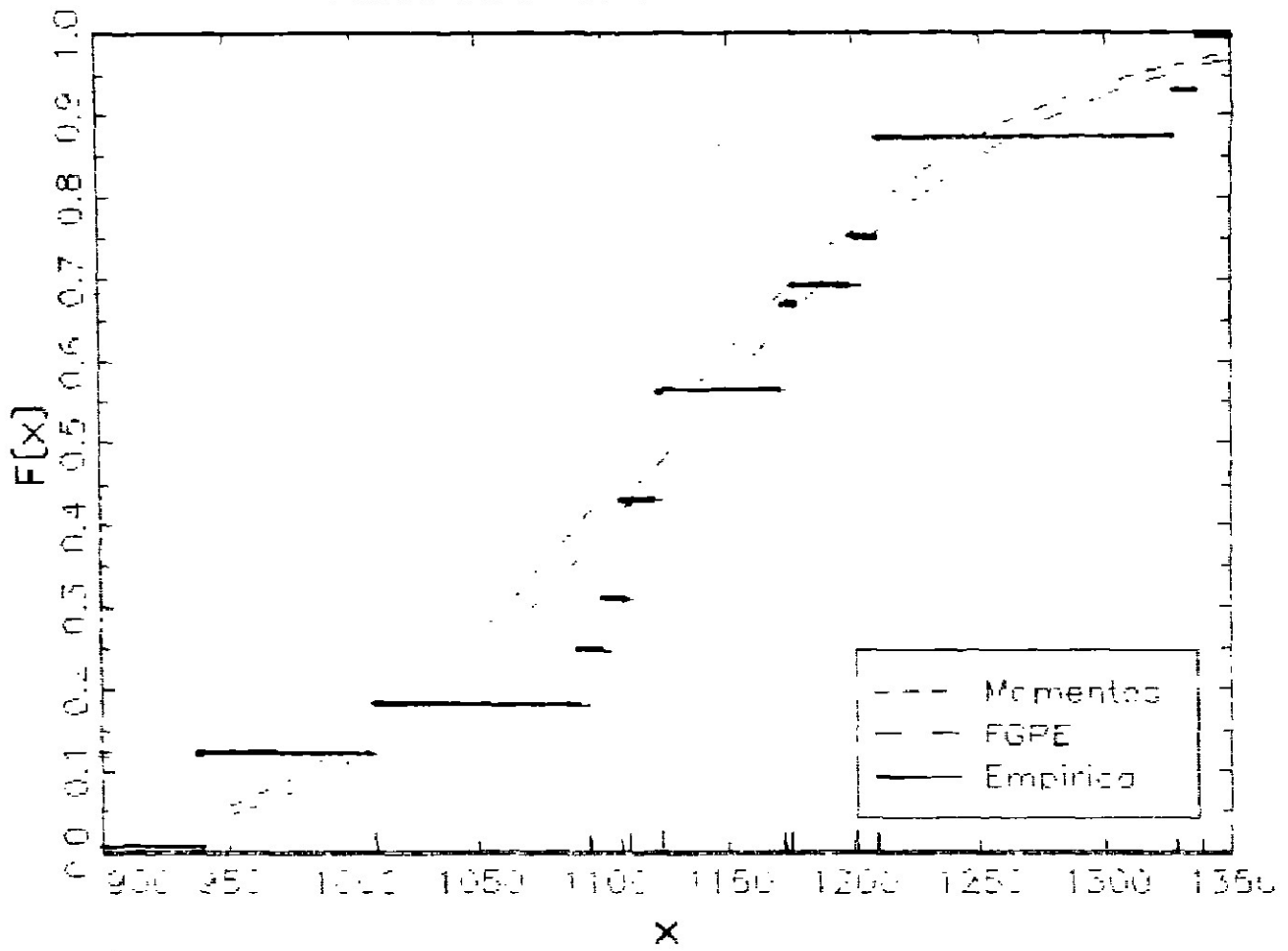


FIG # 5.2

FUNCION DE RIESGO

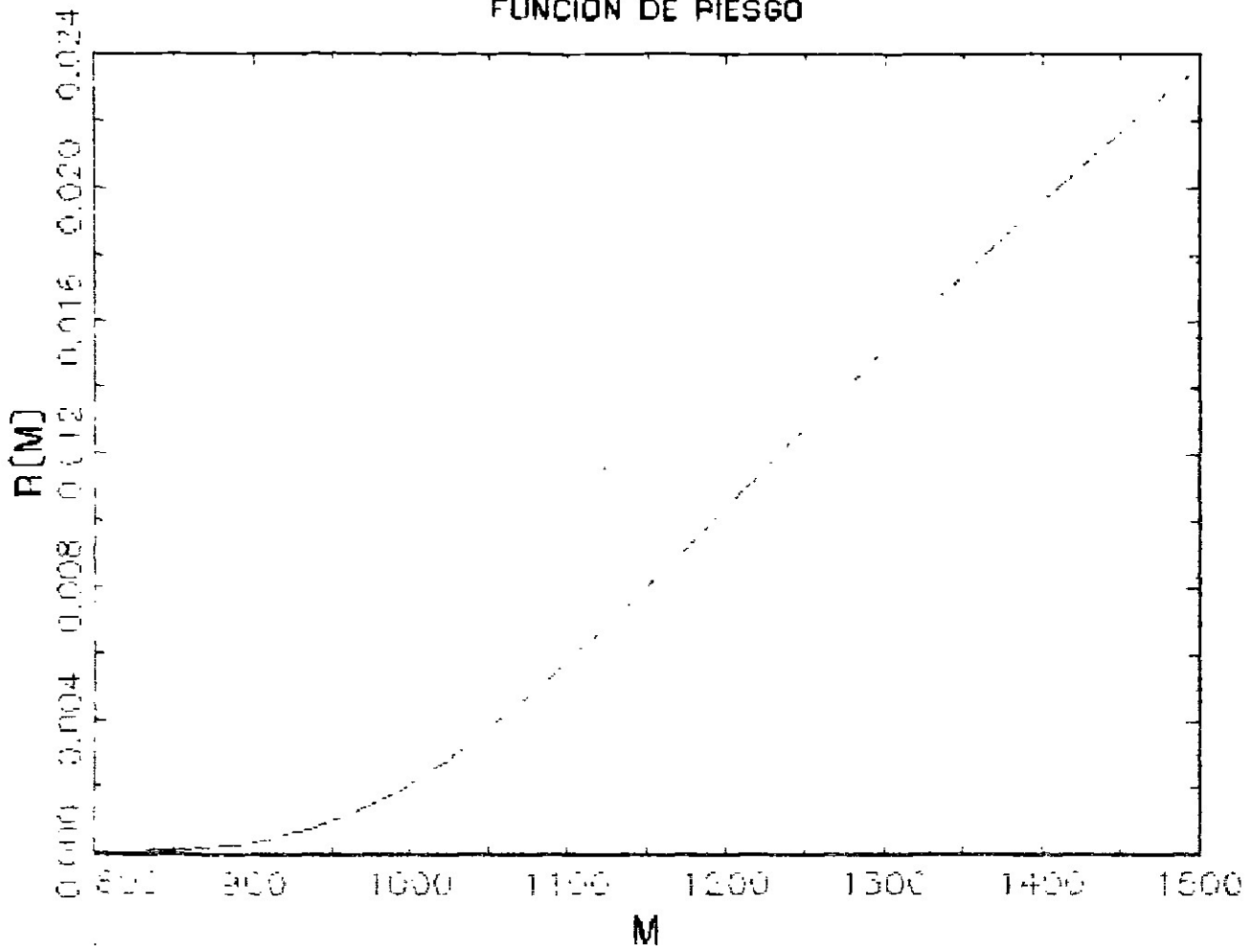


Fig 5.3

## REFERENCIAS

- [1] BHAT, U.N.  
Elements of Applied Stochastic Processes.  
John Wiley & Sons, 1984.
- [2] BILLINGSLEY, P.  
Probability and Measure.  
John Wiley & Sons, 1985.
- [3] BOGDANOFF, J.L. & KOZIN, F.  
Probabilistic Models of Cumulative Damage.  
John Wiley & Sons, 1985.
- [4] COLEMAN, R.  
Procesos Estocásticos. Selección de Problemas Resueltos.  
Editorial Limusa, 1986.
- [5] FELLER, W.  
Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones.  
Editorial Limusa, 1986.
- [6] JOHNSON, N.L. & KOTZ, S.  
Distributions in Statistics. Discrete Distributions.  
Houghton Mifflin Company, 1969.
- [7] MARQUEZ, M.S. y PÉREZ-ABREU, V.  
Law of Large Numbers and Central Limit Theorem for the Empirical Probability Generating Function of Stationary Random Sequences and Processes.  
Aportaciones Matemáticas 4.  
SMM, 1988.
- [8] TAYLOR, H.M. & KARLIN, S.  
An Introduction to Stochastic Modeling.  
Academic Press, Inc., 1984.

ENCUADERNACIONES MODERNAS  
Diego de Montemayor 638 Nte.  
Tel. 74-02-59

